TUMSAT-OACIS Repository - Tokyo

University of Marine Science and Technology

(東京海洋大学)

多重反射を考慮した不均一伝送線路の入力反射係数の計算について

メタデータ	言語: Japanese
	出版者:
	公開日: 2008-03-19
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 斎藤, 健太郎 , 佐々木, 治
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://oacis.repo.nii.ac.jp/records/1198

多重反射を考慮した不均一伝送線路の入力反射係数の計算について

齋藤健太郎・佐々木　治*

A Method to Calculate the Input Reflection Coefficient of Nonuniform Transmission Lines Based on the Concept of the Multiple Reflection

by

Kentaro SAITO and Osamu SASAKI*

Abstract

In this paper the nonuniform transmission line is divided a large number of small sections and each section is replaced by uniform lines. Accordingly the nonuniform trasmission line can be approximated to the line connected with the cascade of many small uniform sections and the input reflection coefficient is represented by the summation of repeated integration. Moreover the input reflection coefficient for a variety of characteristic impedances are calculated and the derived equation is proved correct physically. On the other hand the transmission line model is very useful to analyze the physical phenomena of electromagnetic waves (reflection, transmission and radiation, etc.). Therefore it seems that this model can be applied to the design of microwave absorbers.

Ⅰ.まえがき

現在の情報化社会の中で伝送線路が果たしている役割は非常に大きく，いろいろな方面に利用されその種類も多種多様である。また，電磁波における反射・透過・放射などの物理現象を伝送線路モデルに置き換え解析することは工学上非常に有用であり[1]，電波吸収体の設計などにも応用することができるものと思われる[2]。伝送線路に関する研究や学問の大半は線路を均一なものとして取り扱っているが，実際に使用されている伝送線路のほとんどは微小な湾曲などが原因となり純粋に均一とはいえない線路すなわち不均一な伝送線路になっている。実際の線路のほとんどが不均一伝送線路であることを考えると不均一伝送線路の研究は必要かつ非常に重要であると思われる[3]－[6]。先に，フーリエ逆変換を用いて無損失不均一伝送線路の入力反射係数を近似的に合成する方法を示し，計算プログラムを作成した[7]。また，特性インピーダンスが異なる無損失均一伝送線路を縦続接続した場合の入力における電圧の時間変化を計算した[8]。

本論文では，不均一伝送線路を多数の微小区間に分割しそれぞれの微小区間を均一伝送線路で置き換えることにより近似し，入力反射係数が多重積分の和の形で表されることを示している。さらに，無損失の不均一伝送線路のいろいろな関数形の特性インピーダンスについて入力反射係数を計算することにより，この式が物理的に正しいことを証明している。

Ⅱ．多重積分により表される不均一伝送線路の入力反射係数に関する式の導出

Ⅱ－1．不均一伝送線路を均一伝送線路の縦続接続により近似する方法

終端が整合され，任意の関数形のインピーダンスを持つ不均一伝送線路の入力反射係数を一般的な形で求める

平成８年９月20日受付

＊大学院商船学研究科修士課程交通電子機械工学専攻（平成８年３月修了）

ため，まず線路を微小区間に分割し，それぞれの微小区間が均一伝送線路であるとして，不均一伝送線路を均一伝送線路の縦続接続されたものとして近似する。こうして，それぞれの分割点における多重反射を考慮することにより入力反射係数を計算することができ，さらに線路の分割数を無限大，すなわち，それぞれの均一伝送線路の長さを零に近づけることにより不均一伝送線路の入力反射係数を多重積分の和として求めることができる。

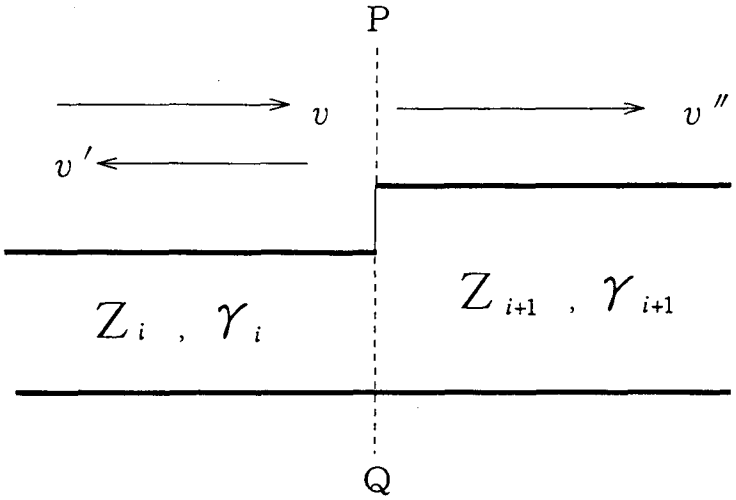

図1　線路定数が異なる均一伝送線路の縦続接続

図1に示すように，線路定数(特性インピーダンス及び伝搬定数)が異なる均一伝送線路を縦続接続した場合，特性インピーダンスの不連続点P-Qにおいて，入射電圧v，反射電圧v'，透過電圧v''の間には，

$$v+v'=v'' \tag{1}$$

なる関係が成立する。また，P-Qにおける反射係数は

$$\Gamma_{i+1}=\frac{Z_{i+1}-Z_i}{Z_{i+1}+Z_i} \quad (1 \leqq i \leqq n-1) \tag{2}$$

であり，

$$v'=\Gamma_{i+1}v \tag{3}$$

であるから，式(1)より

$$v''=(1+\Gamma_{i+1})v \tag{4}$$

となり，P-Qにおける透過係数は

$$T_{i+1}=1+\Gamma_{i+1}=\frac{2Z_{i+1}}{Z_{i+1}+Z_i} \tag{5}$$

となる。

さて，図2に示すように，終端が整合された不均一伝送線路をn分割し，それぞれの区間を特性インピーダン

ス Z_j，伝搬定数 γ_j，線路長 l_j ($j=1, 2, \cdots, n$) なる均一伝送線路で置き換え，不均一伝送線路が均一伝送線路の縦続接続されたものとして近似すれば，入力端からの入射電圧に対しそれぞれの不連続点において反射電圧及び透過電圧を生じ，多重反射によって一部は再び入力端に戻り，残りは終端の負荷へと伝送される。したがって，大きさ1の入射電圧に対し，各不連続点で反射，透過を繰り返しながら入力端まで戻ってくる電圧を計算することにより不均一伝送線路の入力反射係数を計算することができる。

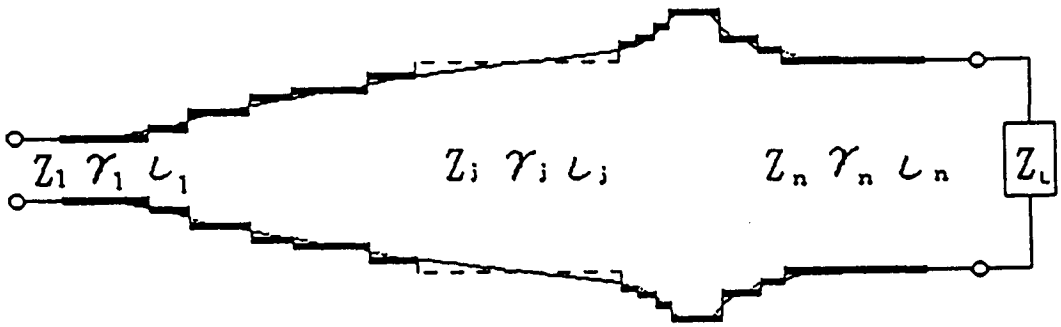

図2　n個の均一伝送線路の縦続接続で置き換えられた不均一伝送線路

II-2．2次反射まで考慮した入力反射係数の式

最初に，2次反射まで考慮した場合の入力反射係数を求める。これは各不連続点での反射回数が2回以下で入力端まで戻ってくる電圧の和として与えられる。すなわち，図3で示される伝送線路の入力端における電圧の総和を求める。

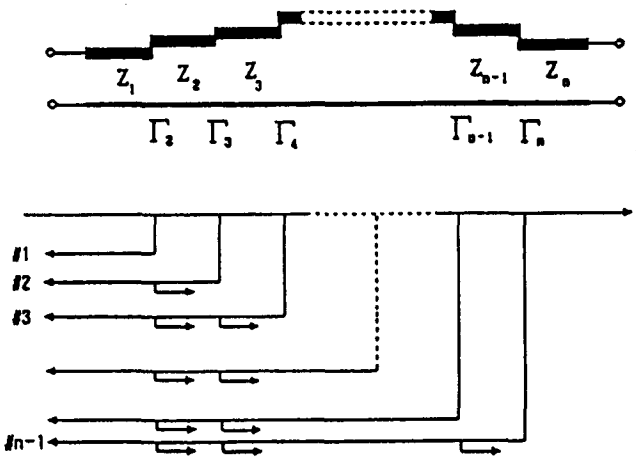

図3　伝送線路の不連続点における反射回数が2回以下の電圧波の流れ

図3から入力端に戻ってくるそれぞれの反射電圧を求めてみる。すると

#1　$\Gamma_2 \cdot \exp(-2\gamma_1 l_1)$

#2　$\Gamma_3 \cdot \exp\{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)\} \cdot (1-\Gamma_2^2)$

#3　$\Gamma_4 \cdot \exp\{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3)\} \cdot (1-\Gamma_2^2) \cdot (1-\Gamma_3^2)$

#4　$\Gamma_5 \cdot \exp\{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4)\} \cdot (1-\Gamma_2^2) \cdot (1-\Gamma_3^2) \cdot (1-\Gamma_4^2)$

となる。したがって，＃１から＃ｎ－１までの電圧の和を計算すれば，２次反射まで考慮した入力反射係数の式は次のように求めることができる。

$$\Lambda_{[2]} = \sum_{j=1}^{n-1} \Gamma_{j+1} \exp\left(-2\sum_{r=1}^{j} \gamma_r l_r\right) \prod_{i=0}^{j-1} \left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) \qquad (6)$$

ただし，

$$\left(1-\Gamma_1^2\right)=1 \qquad (7)$$

とする。

Ⅱ-３．４次反射まで考慮した入力反射係数の式

次に，反射回数が３回以上４回以下で入力端まで戻ってくる電圧波の和を考える。反射回数が３回以上ともなると，入力端まで戻ってくる電圧波のすべてを考慮に入れその電圧波の和を一般的な式で表すことは，起こりうる反射及び透過現象の数が非常に多くなるため困難となる。そこで，不連続点で生じる反射及び透過現象をすべて考えることは諦め，この現象をすべてではないがほぼ考慮できると考えられる図４に示した電圧波の和を考えることによりその一般式を導き出すことを考える。この考え方を導入すると最終的に求められる入力反射係数の数値的正確さが幾分損なわれる。しかし，この考え方に基づいた電圧波の考慮による近似解は徐々にではあるが確実に厳密解に近づいていき，４次，６次，８次，10次，・・・と考慮する反射次数を上げていくと最終的にはほとんど厳密解に等しい近似解が得られる。

図４で示した電圧波はどのようなものであるかを説明する。同図において線路の不連続点を${}_1\xi_2$，${}_2\xi_3$，・・・，${}_{n-2}\xi_{n-1}$，${}_{n-1}\xi_n$とする。この電圧波を考慮する場合の基本となる考え方は，入射電圧波が${}_{p-1}\xi_p$(pは２以上の整数)において１回目の反射を生じた場合，より左もしくはその点(すなわち${}_1\xi_2$，${}_2\xi_3$，・・・，${}_{p-2}\xi_{p-1}$，${}_{p-1}\xi_p$)で２回目以降の反射を引き起こすものだけを取り上げ，考慮するのである。この考え方に従って電圧波を考えると，図４で示している伝送線路の不連続点における反射回数が３回以上４回以下で入力端まで戻ってくる電圧波の流れが理解できる。${}_1\xi_2$で１回目の反射が生じた場合，これに該当する電圧波はない。${}_2\xi_3$で１回目の反射が生じた場合，２回目の反射が生じ得る点は${}_1\xi_2$のみであり，３回目の反射が生じ得る点も${}_2\xi_3$のみである。したがって，${}_1\xi_2$と${}_2\xi_3$の間で３回以上４回以下の反射を生じ入力端に戻る＃１で示された電圧波のみが，この場合の考えられる電圧波の流れとして決定されるのである。${}_3\xi_4$の点で１回目の反射を生じた場合，２回目の反射は${}_1\xi_2$と${}_2\xi_3$の２つの点で生じる場合が考えられる。図４の＃２(１)は２回目の反射が${}_2\xi_3$の点で生じた場合の電圧波の流れであり，＃２(２)及び＃２(３)は${}_1\xi_2$の点で生じた場合の電圧波の流れである。２回目の反射が${}_2\xi_3$で生じた場合，３回目の反射は${}_3\xi_4$に限定されるため１通りの流れとなるが，２回目の反射が${}_1\xi_2$で生じた場合は３回目の反射として${}_2\xi_3$と${}_3\xi_4$の２つの点が考えられるため２通りの流れとなる。その結果，${}_3\xi_4$の点で１回目の反射を生じる場合は＃２(１)～(３)の３通りの電圧波の流れが考えられる。このように考えていくと，その各々の場合において次のような電圧波の式が得られる。

□　${}_2\xi_3$で１回目の反射を生じる場合

＃１　$-\Gamma_2 \cdot \Gamma_3^2 \cdot \exp\left\{-2\left(\gamma_1 l_1 + 2\gamma_2 l_2\right)\right\} \cdot \left(1-\Gamma_2^2\right)$

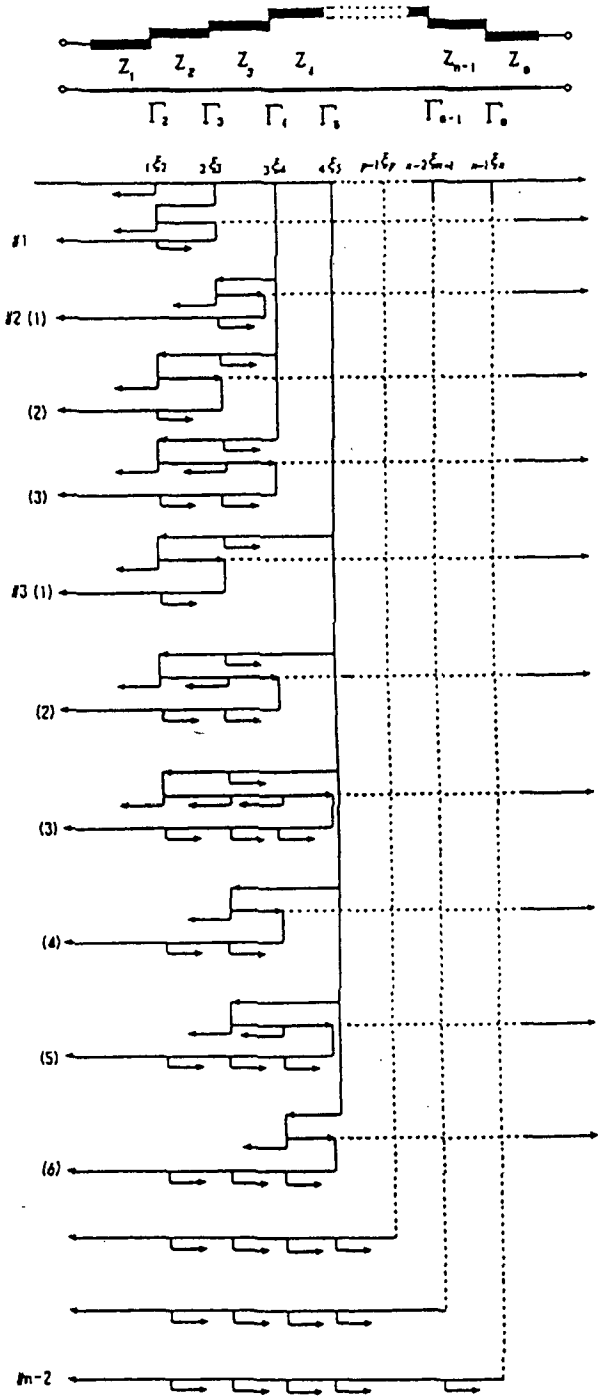

図4　伝送線路の不連続点における反射回数が3回以上4回以下で入力端まで戻ってくる電圧波の流れ

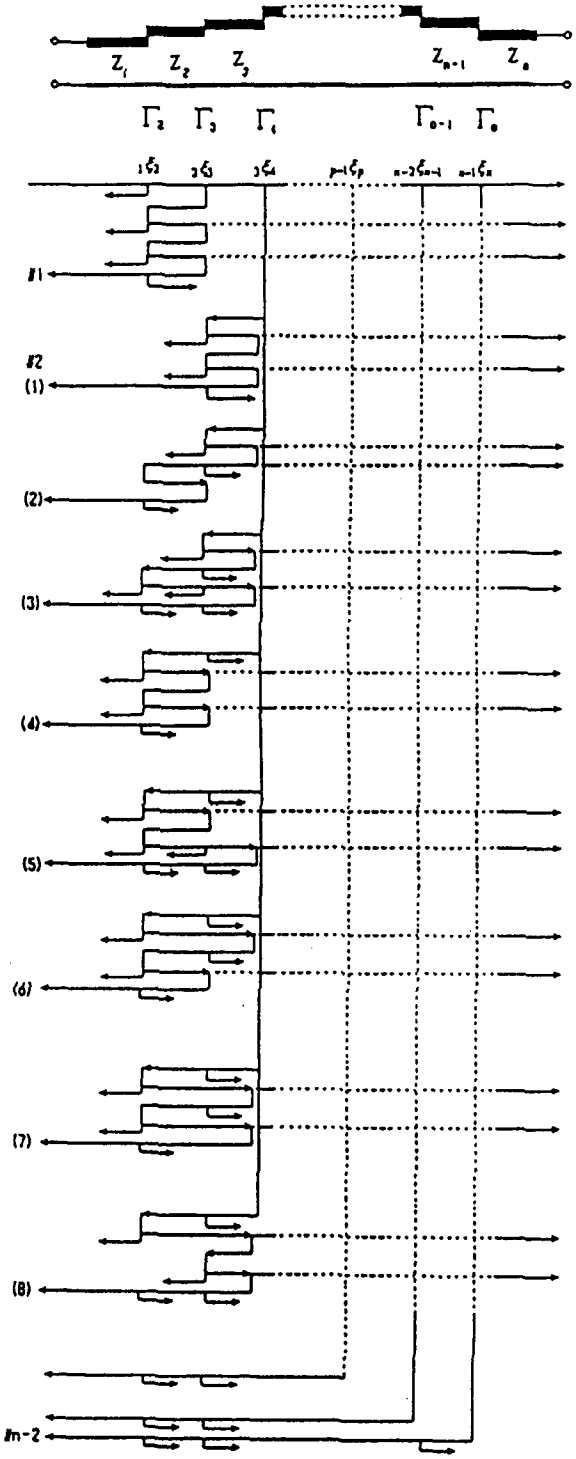

図5　伝送線路の不連続点における反射回数が5回以上6回以下で入力端まで戻ってくる電圧波の流れ

□ ${}_3\xi_4$で１回目の反射を生じる場合

＃２(１)　$-\Gamma_2\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_4\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)$

(２)　$-\Gamma_2\cdot\Gamma_4^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2$

(３)　$-\Gamma_3\cdot\Gamma_4^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)$

この＃２(１)～(３)の式をまとめると

＃２　$$-\Gamma_4\sum_{k_1=1}^{2}\Gamma_{k_1+1}\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{3}\gamma_r l_r\right)\cdot\left[\sum_{j=k_1}^{2}\Gamma_{j+2}\exp\left(-2\sum_{r=1}^{j+1}\gamma_r l_r\right)\cdot\prod_{i=1}^{j}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right]$$

□ ${}_4\xi_5$で１回目の反射を生じる場合

＃３(１)　$-\Gamma_2\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_5\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+\gamma_3 l_3+\gamma_4 l_4)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)\cdot(1-\Gamma_4^2)$

(２)　$-\Gamma_2\cdot\Gamma_4\cdot\Gamma_5\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3+\gamma_4 l_4)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2\cdot(1-\Gamma_4^2)$

(３)　$-\Gamma_2\cdot\Gamma_5^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3+2\gamma_4 l_4)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2\cdot(1-\Gamma_4^2)^2$

(４)　$-\Gamma_3\cdot\Gamma_4\cdot\Gamma_5\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3+\gamma_4 l_4)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)\cdot(1-\Gamma_4^2)$

(５)　$-\Gamma_3\cdot\Gamma_5^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3+2\gamma_4 l_4)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)\cdot(1-\Gamma_4^2)^2$

(６)　$-\Gamma_4\cdot\Gamma_5^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\gamma_3 l_3+2\gamma_4 l_4)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)\cdot(1-\Gamma_4^2)$

この＃３(１)～(６)式をまとめると

＃３　$$-\Gamma_5\sum_{k_1=1}^{3}\Gamma_{k_1+1}\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{4}\gamma_r l_r\right)\cdot\mathop{\Theta}_{i=k_1+1}^{3}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\left[\sum_{j=k_1}^{n-2}\Gamma_{j+2}\exp\left(-2\sum_{r=1}^{j+1}\gamma_r l_r\right)\cdot\prod_{i=1}^{j}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right]$$

ただし，

$$\mathop{\Theta}_{i=k_1}^{k_2}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\cong\begin{cases}\prod_{k_1}^{k_2}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) & (k_1\leqq k_2)\\ 1 & (k_1>k_2)\end{cases}$$

となる。

このような手順で＃１から＃ｎ－２までのこれらの電圧の和を計算することにより，４次反射を考慮したｎ段の反射電圧に対して次の一般式を得ることができる。

$$\Lambda_{[4]}=-\sum_{k_2=3}^{n}\Gamma_{k_2}\sum_{k_1=1}^{k_2-2}\Gamma_{k_1+1}\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{k_2-1}\gamma_r l_r\right)\cdot\mathop{\Theta}_{i=k_1+1}^{k_2-2}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\left[\sum_{j=k_1}^{n-2}\Gamma_{j+2}\exp\left(-2\sum_{r=1}^{j+1}\gamma_r l_r\right)\cdot\prod_{i=1}^{j}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right]\quad(8)$$

ただし,

$$\overset{k_2}{\underset{i=k_1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^{2}\right)=\begin{cases}\prod_{k_1}^{k_2}\left(1-\Gamma_{i+1}^{2}\right) & (k_1\leqq k_2)\\ 1 & (k_1>k_2)\end{cases} \tag{9}$$

とする。したがって，4次反射まで考慮した入力反射係数は次式となる。

$$\begin{aligned}\Gamma_{[4]}&=\Lambda_{[2]}+\Lambda_{[4]}\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\Gamma_{j+1}\exp\left(-2\sum_{r=1}^{j}\gamma_r l_r\right)\prod_{i=0}^{j-1}\left(1-\Gamma_{i+1}^{2}\right)-\sum_{k_2=3}^{n}\Gamma_{k_2}\sum_{k_1=1}^{k_2-2}\Gamma_{k_1+1}\cdot\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{k_2-1}\gamma_r l_r\right)\\&\quad\cdot\overset{k_2-2}{\underset{i=k_1+1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^{2}\right)\cdot\left[\sum_{j=k_1}^{n-2}\Gamma_{j+2}\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{k_2-1}\gamma_r l_r\right)\cdot\prod_{i=1}^{j}\left(1-\Gamma_{i+1}^{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Ⅱ-4．6次反射まで考慮した入力反射係数の式

次に，反射回数が5回以上6回以下で入力端まで戻ってくる電圧波の和を考える。第Ⅱ-3節で導入した考え方をこの場合においても採用する。すると図5のような電圧波の流れがこの場合において考えられる。各々の場合において電圧波の式を求めると次のようになる。

□ ${}_2\xi_3$で1回目の反射を生じる場合

#1 $\Gamma_2^2\cdot\Gamma_3^3\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+3\gamma_2 l_2)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)$

□ ${}_3\xi_4$で1回目の反射を生じる場合

#2(1) $\Gamma_3^2\cdot\Gamma_4^3\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+3\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)$

(2) $\Gamma_2\cdot\Gamma_3^2\cdot\Gamma_4^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)$

(3) $\Gamma_2\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_4^3\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+3\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2$

(4) $\Gamma_2^2\cdot\Gamma_3^2\cdot\Gamma_4\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+3\gamma_2 l_2+\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)$

(5) $\Gamma_2^2\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_4^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+3\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2$

(6) $\Gamma_2^2\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_4^2\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+3\gamma_2 l_2+2\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2$

(7) $\Gamma_2^2\cdot\Gamma_4^3\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+3\gamma_2 l_2+3\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2$

(8) $\Gamma_2\cdot\Gamma_3\cdot\Gamma_4^3\cdot\exp\{-2(\gamma_1 l_1+2\gamma_2 l_2+3\gamma_3 l_3)\}\cdot(1-\Gamma_2^2)\cdot(1-\Gamma_3^2)^2$

この＃２(１)～(８)式をまとめると

$$\#2 \qquad \Gamma_4 \sum_{k_3=1}^{2} \Gamma_{k_3+1} \exp\left(-2\sum_{r=k_3+1}^{3}\gamma_r l_r\right)\cdot \overset{2}{\underset{i=k_3+1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)$$

$$\cdot\left[\sum_{k_2=k_3+2}^{4}\Gamma_{k_2}\cdot\sum_{k_1=1}^{k_2-2}\Gamma_{k_1+1}\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{k_2-1}\gamma_r l_r\right)\cdot\overset{k_2-2}{\underset{i=k_1+1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right]\cdot\left[\sum_{j=k_1}^{2}\Gamma_{j+2}\exp\left(-2\sum_{r=1}^{j+1}\gamma_r l_r\right)\cdot\prod_{i=1}^{j}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right]$$

ただし，

$$\overset{k_2}{\underset{i=k_1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) \cong \begin{cases} \prod_{k_1}^{k_2}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) & (k_1 \leqq k_2) \\ 1 & (k_1 > k_2) \end{cases}$$

となる。

この手順に従い，４次反射を考慮に入れた場合と同様に，次は$_4\xi_5$で１回目の反射を生じる場合，その次は$_5\xi_6$，$_6\xi_7$，・・・，$_{n-1}\xi_n$と次々にその不連続点で１回目の反射を生じる電圧波の流れを考え，＃１から＃ｎ－２までのこれらの電圧の和を計算することにより，６次反射を考慮したｎ段の反射電圧に対して次の一般式を得ることができる。

$$\Lambda_{[6]} = \sum_{k_4=3}^{n}\Gamma_{k_4}\sum_{k_3=1}^{k_4-2}\Gamma_{k_3+1}\exp\left(-2\sum_{r=k_3+1}^{k_4-1}\gamma_r l_r\right)\cdot\overset{k_4-2}{\underset{i=k_3+1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)$$

$$\cdot\left[\sum_{k_2=k_3+2}^{n}\Gamma_{k_2}\cdot\sum_{k_1=1}^{k_2-2}\Gamma_{k_1+1}\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{k_2-1}\gamma_r l_r\right)\cdot\overset{k_2-2}{\underset{i=k_1+1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right]\cdot\left[\sum_{j=k_1}^{n-2}\Gamma_{j+2}\exp\left(-2\sum_{r=1}^{j+1}\gamma_r l_r\right)\cdot\prod_{i=1}^{j}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right] \quad (11)$$

ただし，

$$\overset{k_2}{\underset{i=k_1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) \cong \begin{cases} \prod_{k_1}^{k_2}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) & (k_1 \leqq k_2) \\ 1 & (k_1 > k_2) \end{cases} \quad (12)$$

とする。したがって，６次反射まで考慮した入力反射係数は次式となる。

$$\begin{aligned}\Gamma_{[6]} &= \Lambda_{[2]} + \Lambda_{[4]} + \Lambda_{[6]} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\Gamma_{j+1}\exp\left(-2\sum_{r=1}^{j}\gamma_r l_r\right)\prod_{i=0}^{j-1}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) + \sum_{p=2}^{3}(-1)^{p-1}\sum_{k_{2p-2}=3}^{n}\Gamma_{k_{2p-2}}\sum_{k_{2p-3}=1}^{k_{2p-2}-2}\Gamma_{k_{2p-3}+1}\cdot\exp\left(-2\sum_{r=k_{2p-3}+1}^{k_{2p-2}-1}\gamma_r l_r\right) \\ &\quad\cdot\overset{k_{2p-2}-2}{\underset{i=k_{2p-3}+1}{\Theta}}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\cdot\left[\sum_{j=k_1}^{n-2}\Gamma_{j+2}\exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{k_1-1}\gamma_r l_r\right)\cdot\prod_{i=1}^{j}\left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right] \end{aligned} \quad (13)$$

Ⅱ-５．２＊ｍ次反射(ｍは正の整数)まで考慮した入力反射係数の式

第Ⅱ-２節で２次反射電圧，第Ⅱ-３節で４次反射電圧，第Ⅱ-４節で６次反射電圧を求める一般式を導いたが，これと同様の方法により８次反射$\Lambda_{[8]}$，10次反射$\Lambda_{[10]}$，・・・，２＊ｍ次反射$\Lambda_{[2m]}$と順番に高次の反射電圧の式を求め，最後にそれらをすべて加え合わせると２＊ｍ次反射電圧まで考慮した入力反射係数の式として次の一般式を導くことができる。

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{[2m]} &= \Lambda_{[2]} + \sum_{p=2}^{m} \Lambda_{[2p]} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \Gamma_{j+1} \exp\left(-2\sum_{r=1}^{j} \gamma_r l_r\right) \prod_{i=0}^{j-1} \left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) \\
&+ \sum_{p=2}^{m} (-1)^{p-1} \sum_{k_{2p-2}=3}^{n} \Gamma_{k_{2p-2}} \sum_{k_{2p-3}=1}^{k_{2p-2}-2} \Gamma_{k_{2p-3}+1} \cdot \exp\left(-2\sum_{r=k_{2p-3}+1}^{k_{2p-2}-1} \gamma_r l_r\right) \cdot \underset{i=k_{2p-3}+1}{\overset{k_{2p-2}-2}{\Theta}} \left(1-\Gamma_{i+1}^2\right) \\
&\left[\underset{s=0}{\overset{p-3}{\Theta}} \sum_{k_{2s+2}=k_{2s+3}+2}^{n} \Gamma_{k_{2s+2}} \cdot \sum_{k_{2s+1}=1}^{k_{2s+2}-2} \Gamma_{k_{2s+1}+1} \exp\left(-2\sum_{r=k_{2s+1}+1}^{k_{2s+2}-1} \gamma_r l_r\right) \cdot \underset{i=k_{2s+3}+1}{\overset{k_{2s+2}-2}{\Theta}} \left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right] \cdot \left[\sum_{j=k_1}^{n-2} \Gamma_{j+2} \exp\left(-2\sum_{r=k_1+1}^{k_j-1} \gamma_r l_r\right) \cdot \prod_{i=1}^{j} \left(1-\Gamma_{i+1}^2\right)\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

II-6．不均一伝送線路の入力反射係数

式(14)において，特性インピーダンス $Z(x)$（ただし，$Z(x) > 0$ で $Z(x)$ は滑らかな関数）なる不均一伝送線路の分割数nを無限大，すなわち，縦続接続されたn個の均一伝送線路の長さ l_j ($j=1, 2, \cdots, n$) を零に近づければ，

$$
\begin{aligned}
\lim_{l_j, l_{j+1} \to 0} \Gamma_{j+1} &= \lim_{l_j, l_{j+1} \to 0} \frac{Z_{j+1} - Z_j}{Z_{j+1} + Z_j} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Z(x+\Delta x) - Z(x)}{Z(x+\Delta x) + Z(x)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx} \cdot dx
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{l_j, l_{j+1} \to 0} (1-\Gamma_{j+1})^2 &= \lim_{l_j, l_{j+1} \to 0} \frac{4 Z_{j+1} Z_j}{(Z_{j+1} + Z_j)^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 Z(x+\Delta x) Z(x)}{\{Z(x+\Delta x) + Z(x)\}^2} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{l_r \to 0} \left(-2\sum_{r=1}^{j} \gamma_r l_r\right) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(-2\sum_{r=1}^{j} \gamma_r \cdot \Delta x\right) \\
&= -2\int_0^x \gamma(x) dx
\end{aligned}
\tag{17}
$$

となるので，$\Gamma_{[2m]}$ を特性インピーダンス Z_i ($i=1, 2, \cdots, n$) を用いて表し，

$l_j \to 0$ のとき $\Gamma_{[2m]} \to \Gamma_{[2m]}(0)$

とすると

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{[2m]}(0) &= \int_0^l \left\{\frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx}\right\} \exp\left(-2\int_0^x \gamma(x) dx\right) dx \\
&+ \sum_{p=2}^{m} (-1)^{p-1} \int_0^l \left\{\frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2p-2})}{dx_{2p-2}}\right\} \cdot \int_0^{x_{2p-2}} \left\{\frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2p-3})}{dx_{2p-3}}\right\} \cdot \exp\left(-2\int_{x_{2p-3}}^{x_{2p-2}} \gamma(x) dx\right) dx_{2p-2} dx_{2p-3} \\
&\cdot \underset{s=0}{\overset{p-3}{\Theta}} \left[\int_{x_{2s+3}}^{l} \left\{\frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2s+2})}{dx_{2s+2}}\right\} \cdot \int_0^{x_{2s+2}} \left\{\frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2s+1})}{dx_{2s+1}}\right\} \cdot \exp\left(-2\int_{x_{2s+1}}^{x_{2s+2}} \gamma(x) dx\right) dx_{2s+2} dx_{2s+1}\right] \\
&\cdot \left[\int_{x_1}^{l} \left\{\frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx}\right\} \cdot \exp\left(-2\int_0^x \gamma(x) dx\right) dx\right]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx} \right\} \exp\left(-2 \int_0^x \gamma(x) dx \right) dx \\
&+ \sum_{p=2}^{m} (-1)^{p-1} \int_0^l \int_0^{x_{2p-2}} \int_{x_{2p-3}}^l \int_0^{x_{2p-4}} \cdots \int_{x_3}^l \int_0^{x_2} \int_{x_1}^l \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx} \right\} \exp\left(-2 \int_0^x \gamma(x) dx \right) dx \\
&\cdot \prod_{i=1}^{p-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2i})}{dx_{2i}} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2i-1})}{dx_{2i-1}} \right\} \cdot \exp\left(-2 \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \gamma(x) dx \right) dx_{2i-1} dx_{2i}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となる。　m＝∞とすれば，

$$
\Gamma_{[2m]}(0) \Big|_{m=\infty} = \Gamma(0) \tag{20}
$$

であり，結果として次式を得る。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(0) &= \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx} \right\} \exp\left(-2 \int_0^x \gamma(x) dx \right) dx \\
&+ \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^{p-1} \int_0^l \int_0^{x_{2p-2}} \int_{x_{2p-3}}^l \int_0^{x_{2p-4}} \cdots \int_{x_3}^l \int_0^{x_2} \int_{x_1}^l \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx} \right\} \exp\left(-2 \int_0^x \gamma(x) dx \right) dx \\
&\cdot \prod_{i=1}^{p-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2i})}{dx_{2i}} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2i-1})}{dx_{2i-1}} \right\} \cdot \exp\left(-2 \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \gamma(x) dx \right) dx_{2i-1} dx_{2i}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

これが，不均一伝送線路の入力反射係数を求める式である。無損失線路の場合は次式となる。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(0) &= \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx} \right\} \exp\left(-2j \int_0^x \beta(x) dx \right) dx \\
&+ \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^{p-1} \int_0^l \int_0^{x_{2p-2}} \int_{x_{2p-3}}^l \int_0^{x_{2p-4}} \cdots \int_{x_3}^l \int_0^{x_2} \int_{x_1}^l \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x)}{dx} \right\} \exp\left(-2j \int_0^x \beta(x) dx \right) dx \\
&\cdot \prod_{i=1}^{p-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2i})}{dx_{2i}} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(x_{2i-1})}{dx_{2i-1}} \right\} \cdot \exp\left(-2j \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \beta(x) dx \right) dx_{2i-1} dx_{2i}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Ⅲ．入力反射係数の数値計算

Ⅲ-1．数値計算のフローチャート

第Ⅱ章において導出した多重積分により表される無損失不均一伝送線路の入力反射係数の式について数値計算を行い，その周波数特性を求める。この式は多重積分であるため一見複雑に見えるが，数値計算のフローチャートを作成してみると，まず始めに2次反射まで考慮した入力反射係数を1回積分により求め，さらに4次反射まで考慮した入力反射係数を3回積分により求めれば，その後の6次反射，・・・，2＊m次反射まで考慮した入力反射係数は，2次反射まで考慮した入力反射係数から4次反射まで考慮した入力反射係数を求めるまでの一連の多重積分の計算プログラムを繰り返すことにより求まる。したがって，導出した式は電子計算機を用いた数値計算に適しており，迅速に高い近似の入力反射係数が計算できるのが特徴である。

Ⅲ-2．計算結果

特性インピーダンスが以下の図に示された関数形で与えられる場合の無損失不均一伝送線路の入力反射係数の

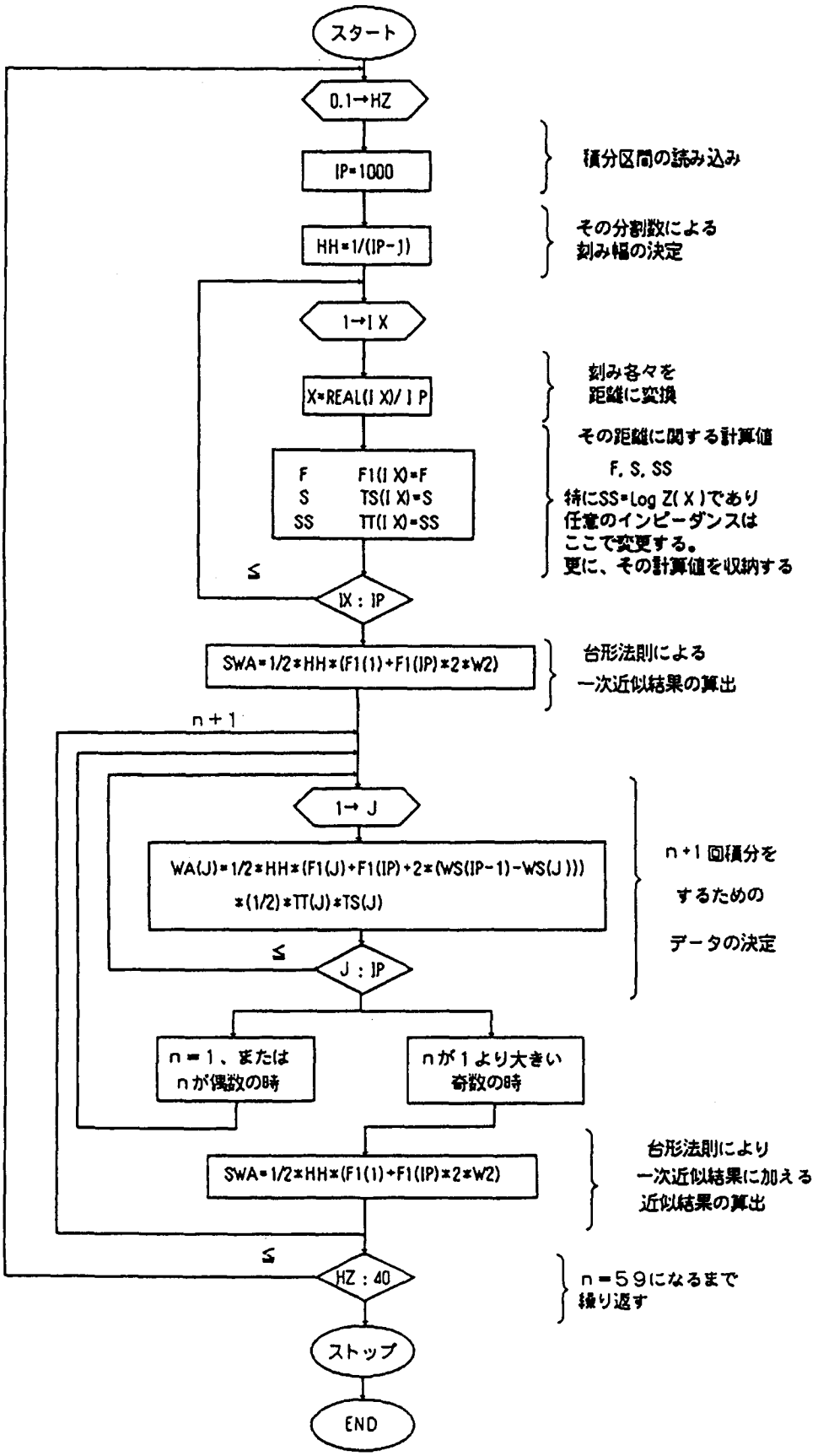

図6　数値計算のフローチャート

周波数特性を図6のフローチャートに従い求めるプログラムを作成した。線路長は1mとし，積分計算は台形公式を用いた。このプログラムにより入力反射係数の周波数特性を計算し，その結果を図7～図11に示す。高次の反射まで考慮することにより，だんだんとリカッチの微分方程式より求めた厳密解に近づいていくことがわかる。

Ⅳ. 考察及び結論

不均一伝送線路の入力反射係数が多重積分の和の形で表されることを示した。すなわち，不均一伝送線路を多数の微小区間に分割し，それぞれの微小区間を均一伝送線路で置き換えることにより近似し，不連続点における多重反射を考慮して入力反射係数を計算する。線路の分割数を無限大にすれば，不均一伝送線路に対する入力反射係数となる。導出された式を用いて，無損失線路の場合についていろいろな関数形の特性インピーダンスを与え入力反射係数を計算した。計算結果より，この方法により計算した入力反射係数は特性インピーダンスの形が緩やかな場合は4次反射まで考慮すればほとんど厳密解に一致し，特性インピーダンスの形がかなり変化する場合でも6次から10次反射程度まで考慮すれば厳密解に一致することが示された。したがって，不連続点のない滑らかに変化する関数形の特性インピーダンスを有する無損失不均一線路の入力反射係数がほとんど問題なく求められることが証明された。本論文での数値計算結果は無損失線路の場合であるが，損失のある不均一伝送線路の入力反射係数も導出した式を用いることにより同様に計算することができるであろう。不均一伝送線路をn個の均一伝送線路の縦続接続されたものとして近似する際に導出した式を用いることにより特性インピーダンス，伝搬定数，線路長がそれぞれ異なるn個の均一伝送線路を縦続接続した場合の入力反射係数も計算することができるであろう。すなわち，多重反射の概念を用いて不均一伝送線路の入力反射係数を導出する過程において，均一伝送線路を多段に縦続接続した場合の入力反射係数を容易に計算できる式が示されていたことになる。特にこの式は，電波吸収壁の設計の際に使用される材料を決定するための伝送線路モデルとしての応用が考えられ，さらなる研究が必要と思われる。

今後の課題としては，数値積分による誤差の評価，他の積分公式を用いた数値計算との比較検討，さらに損失がある不均一RC線路の場合について数値計算を行い厳密解との一致を示すことなどが考えられる。

参考文献

[1] 赤尾保男著「環境電磁工学の基礎」電子情報通信学会（1991年3月）.

[2] 内藤喜之著「電波吸収体」オーム社（1988年11月）.

[3] L.R.Walker and N.Wax,"Non-Uniform Transmission Lines and Reflection Coefficients," J.Appl.Phys., vol.17, pp.1043-1045, Dec.1946.

[4] E.F.Bolinder,"Fourier Transform and Tapered Transmission Lines," Proc.IRE, vol.44, pp.557, Apr.1956.

[5] D.C.Youla,"Analysis and Synthesis of Arbitrary Terminated Lossless Nonuniform Lines," IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-11, pp.363-372, Sept.1964.

[6] K.Kobayashi *et al.*,"Kuroda's Identity for Mixed Lumped and Distributed Circuits and Their Application to Nonuniform Transmission Lines,"IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.MTT-29, pp.81-86, Feb. 1981.

[7] K.Saito,"A Digital Computer Program for the Synthesis of Nonuniform Transmission Lines by the Inverse Fourier Transform Method," Journal of the Tokyo University of Mercantile Marine(Natural Sciences), No.44, pp.31-52(Dec.1993).

[8] 大庭　大「伝送線路における計算機シミュレーションに関する研究」東京商船大学舶用制御工学科卒業論文（平成3年1月30日）.

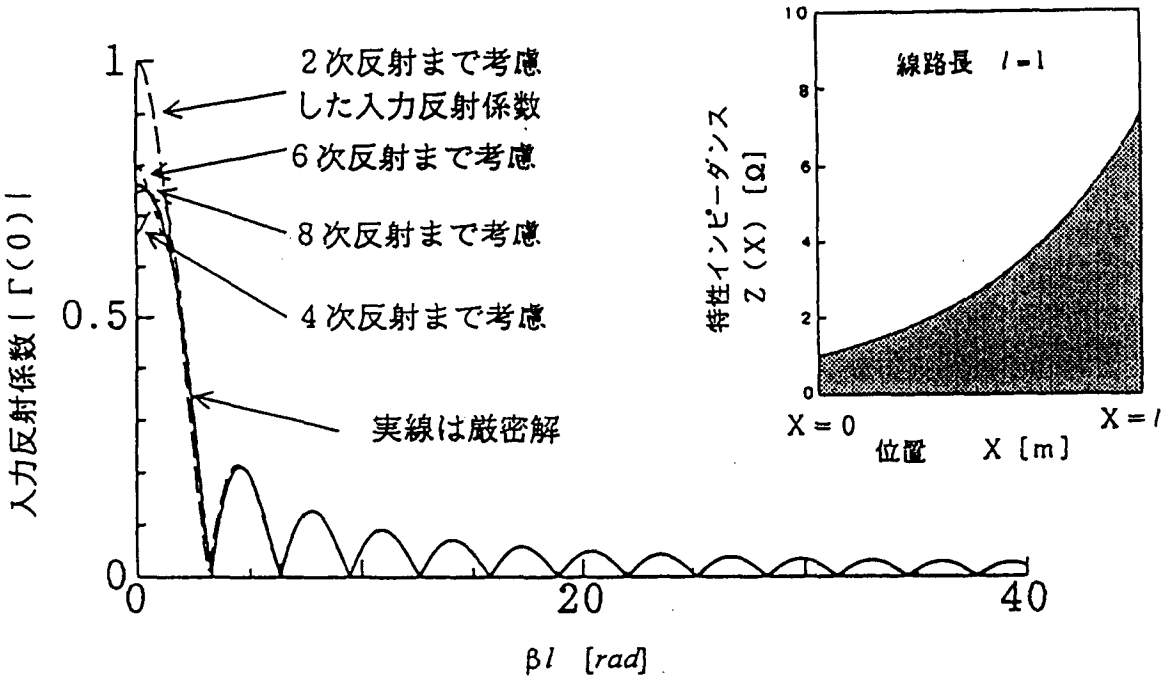

図7 特性インピーダンスが $Z(x)=e^{2x}$ の場合の入力反射係数の周波数特性

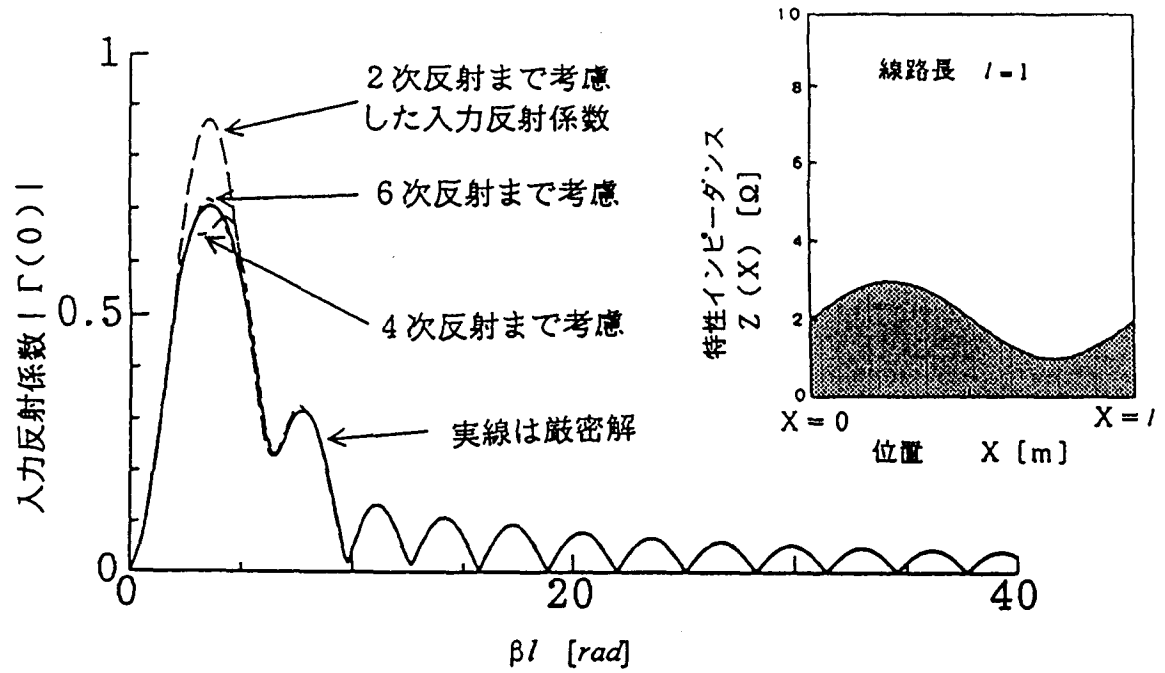

図8 特性インピーダンスが $Z(x)=2+\sin(2\cdot\pi\cdot x)$ の場合の入力反射係数の周波数特性

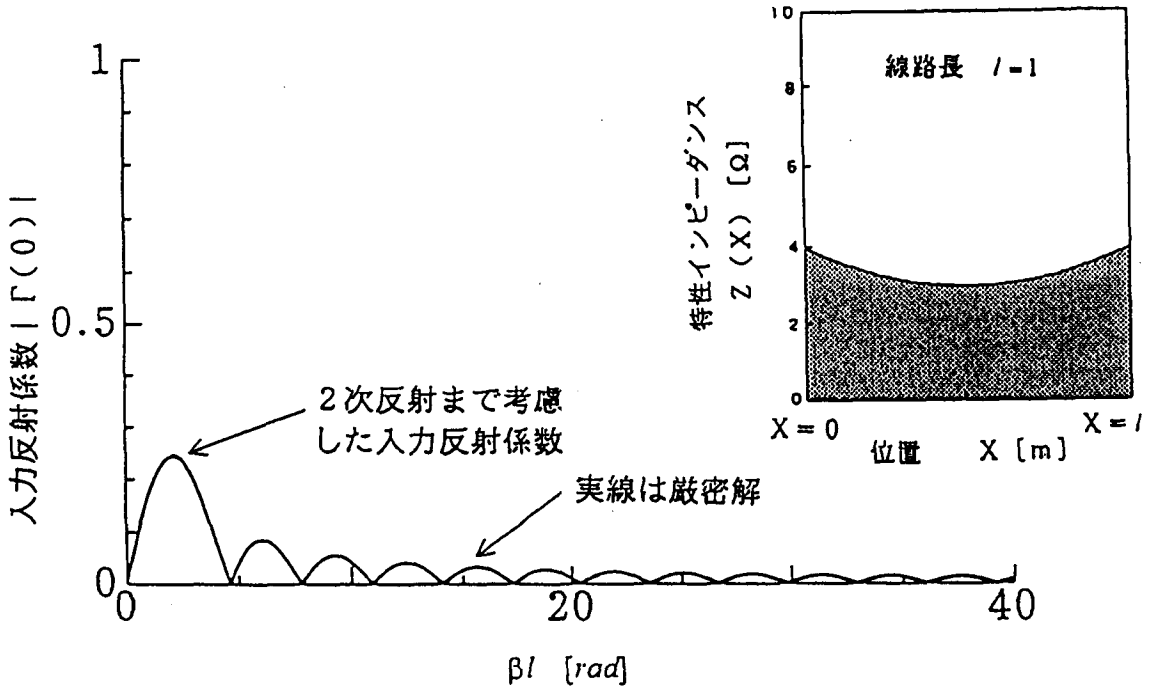

図9 特性インピーダンスが $Z(x)=3+(2\cdot x-1)^2$ の場合の入力反射係数の周波数特性

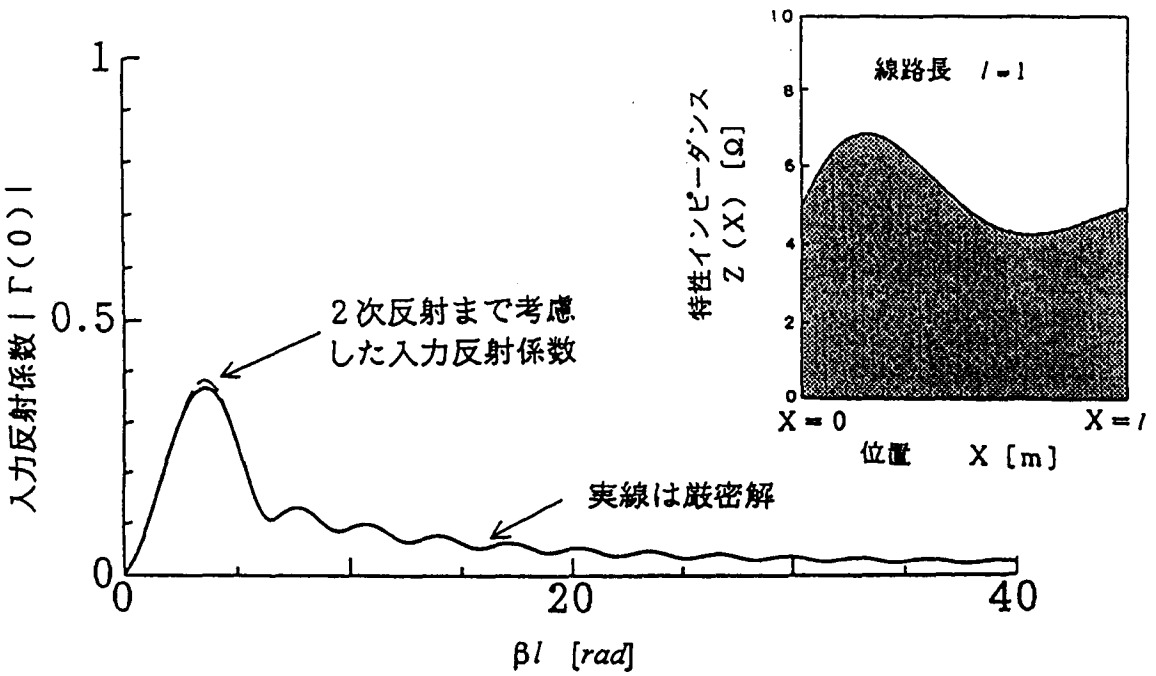

図10 特性インピーダンスが $Z(x)=5+3\cdot e^{-2x}\cdot \sin(2\cdot \pi\cdot x)$ の場合の入力反射係数の周波数特性

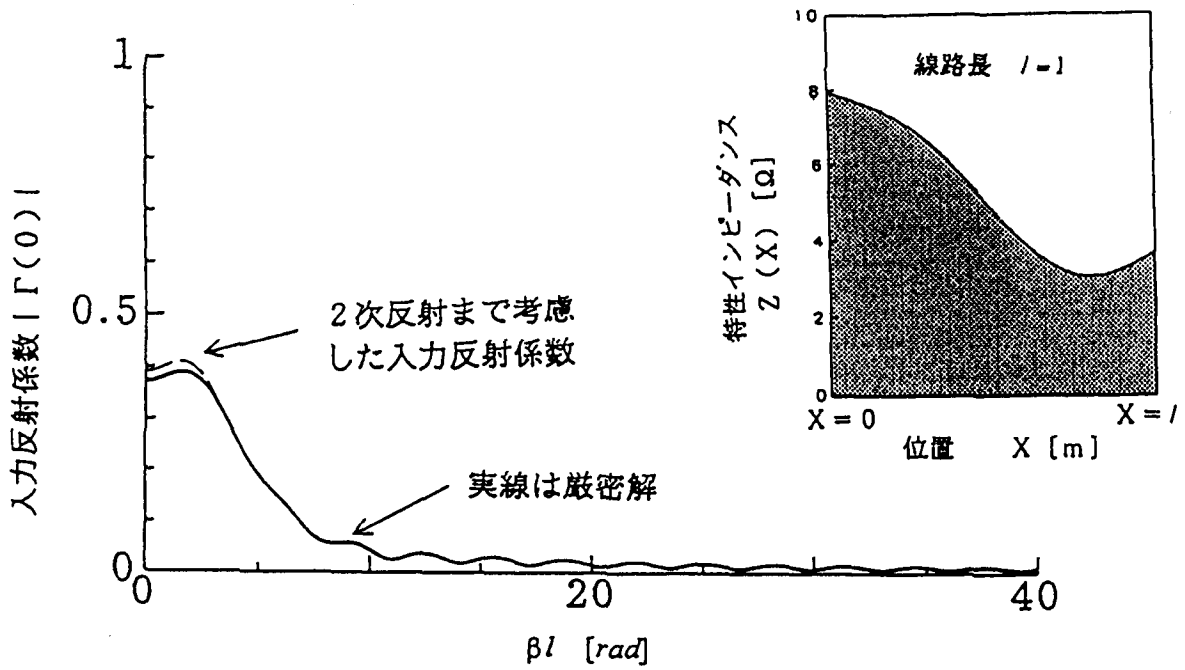

図11 特性インピーダンスが $Z(x)=3+5\cdot e^{-2x}+\sin(2\cdot\pi\cdot x)$ の場合の入力反射係数の周波数特性