自然数Nのペル表現の個数について

著者	松下 修
雑誌名	東京商船大学研究報告. 自然科学
巻	52
ページ	11-19
発行年	2001
URL	http://id.nii.ac.jp/1342/00000557/

自然数 N のペル表現の個数について

松下　修

On the Number of Pellian Representations of Natural Number N

OSAMU MATSUSHITA

はじめに

ペル数列とは漸化式 $P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$ と $P_0=0, P_1=1$ によって定義される数列であり、ペル数列の各項をペル数と呼ぶ。任意の正の整数 N はペル数の和として、次のように表すことができる。すなわち、$N=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P_i$ ここで、α_iは $0\leq\alpha_i\leq 2$ を満たす整数である。このように N をペル数の和で表すことを、N のペル表現といい、N のペル表現の個数を $R(N)$ とかく。$R(N)$ についての次の性質を示すことが本報告の目的である。

1) $N=P_1+P_2+\cdots+P_n \Longleftrightarrow R(N)=1$

2) $0\leq M\leq\left[\dfrac{P_{n+1}}{2}\right]\Longrightarrow R(P_1+\cdots+P_n+M)=R(P_1+\cdots+P_{n+1}-M)$

3) $R(P_n)=\left[\dfrac{n+2}{2}\right]$ $(n=0,1,2,\cdots)$

Abstract

Pell sequence is defined by the second order linear recurrence relation $P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$ with $P_0=1, P_1=1$ and its terms are called Pell numbers. It is well known that any positve integer N can be represented by the sum of Pell numbers as follows:$N=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P_i$ where $0\leq\alpha_i\leq 2$. Such representation is called Pellian representation of N.

We denote the number of Pellian representations of N by $R(N)$. In this paper we shall show the following properties of $R(N)$.

1) $N=P_1+P_2+\cdots+P_n \Longleftrightarrow R(N)=1$

2) $0\leq M\leq\left[\dfrac{P_{n+1}}{2}\right]\Longrightarrow R(P_1+\cdots+P_n+M)=R(P_1+\cdots+P_{n+1}-M)$

3) $R(P_n)=\left[\dfrac{n+2}{2}\right]$ $(n=0,1,2,\cdots)$

平成13年9月18日受付

1 ペル数とゼッケンドルフの定理

次の漸化式で定義される数列 $\{F_n\}$ をフィボナッチ数列という。

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \ F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

すなわち、$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots\cdots$

そして、このフィボナッチ数列にあらわれる数をフィボナッチ数と呼んでいる。フィボナッチ数が文献に登場するのは、はるか昔の西暦1202年（改訂版は1228年）である。「Liber Abaci」という名の本において「rabbit problem」を解く過程でフィボナッチ数が現れた。著者は勿論 Fibonacci であるが、この名はあだ名で Bonaccio の息子と言う意味で、本名は Leonardo である。この本は「数世紀間、数学知識の倉庫」[1] であった。

以後、この数列は多くの数学者の研究対象とされて、膨大な数の公式や性質等が発見されることになった。このなんの変哲もない、ごく簡単な定義による数列が実に多くの美しい性質をもっていることは驚嘆に値すると共に不思議な思いにとらわれる。

さて、多くの定理の中に比較的新しい定理として次のゼッケンドルフの定理がある。

定理 1.1 (Zeckendorf)[2][3] 任意の正の整数 N は次のように唯一通りに表される。

$$N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i \quad \text{但し、} \alpha_1 = 0, \alpha_i = 0 \ \text{または}\ 1 (i \neq 1),\ \alpha_i \alpha_{i+1} = 0$$

この定理は、任意の自然数は、連続しない相異なるフィボナッチ数の和として一意的にあらわすことができることを主張しているが、「連続しない」という条件をはずすならば、この表し方は一般には一意的ではない。N をフィボナッチ数の和で表すことを N のフィボナッチ表現 (Fibonacci representation of N) という。したがって、N のフィボナッチ表現は一般には複数個あることになる。N のフィボナッチ表現の個数を $R_F(N)$ によって、示すことにする。$R_F(N)$ の性質については多くの研究 [4],[5],[6],[7],[8] がなされた。ただし、フィボナッチ数は $F_1 = F_2 = 1$ だから、表現を考えるとき、F_1 は用いないことにする。

さて、このゼッケンドルフの定理の一般化も多くの研究があるが、その一つを紹介するために先ずペル数の定義を述べよう。

定義 1.2 漸化式 $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1},\ \ P_0 = 0,\ P_1 = 1$ を満たす数列 $\{P_n\}$ をペル数列といい、数列にあらわれる数をペル数 (Pell number) という。

すなわち、$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \cdots$

このペル数を用いて、任意の自然数が和として表すことができるのだが、フィボナッチ数のときと違い、和を構成するペル数は2回まで許す。そうしないと任意の自然数を表すことができない。さらに、その表し方は一般に複数個あるが、唯一通りの表し方とするには、条件を付ける必要がある。以上の結果をまとめたのが、次の定理

である。

定理 1.3 [9],[10] 任意の正の整数 N は次のように唯一通りに表される。

$N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$　但し、α_i は自然数で、$0 \leq \alpha_i \leq 2$ を満たしかつ　$\alpha_i = 2$ のとき、$\alpha_{i-1} = 0$

さて、先に記したように上の定理で、但し書きの部分の条件をはずすと N の表し方は一般に複数個ある。なお、自然数をペル数によって、表すことをペル表現 (Pellian representation of N) という。

そこで、N のペル表現の個数を $R_P(N)$ によって、示すことにしよう。本報告の目的は $R_P(N)$ の性質を調べることである。

2　$R_P(N)$ の性質

最初に簡単な補題から始めよう。

補題 2.1 次の等式が成立する。

$$2(P_1 + P_2 + \cdots + P_n) = P_{n+1} + P_n - 1$$

証明は数学的帰納法で容易に示される。

この簡単の等式は以後の展開のなかで、大変有用である。

前節で記した $R_F(N)$ の性質であるが、それをを調べる有効な手段として、数列 $\{R_F(n)\}$ の母関数 $f(x) = \prod_{k=2}^{\infty}(1 + x^{F_n})$ を調べる方法がある。

ペル数の場合は $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{P_k} + x^{2P_k})$ が数列 $\{R_P(n)\}$ の母関数である。以後の為に定義として、まとめておく。

定義 2.2 $g(x), g_n(x)$ を次の式によって定義する。

$$g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{P_k} + x^{2P_k})$$

$$g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + x^{P_k} + x^{2P_k})$$

補題 2.3 次の式が成り立つ。

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} R_P(n) x^n$$

以下、$R_P(N)$ の P を略して、$R(N)$ と書くことにする。

定義 2.4 $R_n(N)$ を、$\prod_{k=1}^{n}(1 + x^{P_k} + x^{2P_k}) = \sum_{m=1}^{L_n} R_n(m) x^m$ を満たす自然数とする。ただし、$L_n = P_{n+1} + P_n - 1$

$R_n(N)$ は $R(N)$ の「近似」であるが、正確には、次の命題が成立する。

命題 2.5 つぎの (1),(2) が成立する。

(1) $1 \leq k \leq P_{n+1} - 1 \Longrightarrow R_n(k) = R_{n+1}(k)$

(2) $1 \leq k \leq P_{n+1} - 1 \Longrightarrow R_n(k) = R(k)$

証明) (1) は $(1 + x^{P_{n+1}} + x^{2P_{n+1}})g_n(x) = g_{n+1}(x)$ からしたがう。

(2) は $P_{n+1} - 1 < P_{n+2} - 1$ と (1) からでる。

この母関数を用いると、$R(N)$ の幾つかの性質の証明が得られるが、本報告では次の対称性だけを挙げておく。

命題 2.6 (R_n の対称性) $R_n(k) = R_n(L_n - k)$

証明)

$$
\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{m=1}^{L_n} R_n(m)x^m \\
&= \prod_{k=1}^{n}(1 + x^{P_k} + x^{2P_k}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} x^{2P_k}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{2P_k} + \left(\frac{1}{x}\right)^{P_k} + 1\right) \\
&= x^{2P_1+2P_2+\cdots+2P_n}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{2P_k} + \left(\frac{1}{x}\right)^{P_k} + 1\right) \\
&= x^{L_n} g_n\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

したがって、$g_n(x) = x^{L_n} g_n\left(\frac{1}{x}\right)$

故に、

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{L_n} R_n(m)x^m &= x^{L_n}\sum_{m=1}^{L_n} R_n(m)\left(\frac{1}{x}\right)^m \\
\sum_{m=1}^{L_n} R_n(m)x^m &= \sum_{m=1}^{L_n} R_n(m)x^{L_n-m}
\end{aligned}
$$

これより、$R_n(k) = R_n(L_n - k)$ 証明終

計算した結果を観察すると、$R(N) = 1$ になる N が $N = 1, 3, 8, 20, 49, 119, 288, 696, \cdots$ となっている。これらの数は次のようにかける。

$$
\begin{aligned}
1 &= P_1 \\
3 &= P_1 + P_2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
8 &= P_1+P_2+P_3\\
20 &= P_1+P_2+P_3+P_4\\
49 &= P_1+P_2+P_3+P_4+P_5\\
119 &= P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6\\
288 &= P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7\\
696 &= P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7+P_8
\end{aligned}$$

したがって、$N=P_1+P_2+\cdots+P_n \Longrightarrow R(N)=1$ が成り立つことが予想される。実は、この逆も成り立つ。

定理 2.7 $N=P_1+P_2+\cdots+P_n \Longleftrightarrow R(N)=1$

証明) $\Longrightarrow$ の証明

n に関する数学的帰納法で示す。

$n=1$ のときは明らか。$P_1+P_2+\cdots+P_{n-1}$ のときは成立つと仮定して、$N=P_1+P_2+\cdots+P_n$ においても成立つことを示す。

先ず, $P_n<N<2P_n$ であることに注意しよう。なぜなら、$P_n<N$ は明らかだし、$N<2P_n$ は次のようにして解る。

補題 2.1 から、$P_1+P_2+\cdots+P_{n-1}=\dfrac{P_{n-1}+P_n-1}{2}$

$P_{n-1}<P_n$ だから、

$$\begin{aligned}
P_1+P_2+\cdots+P_{n-1} &< \frac{P_n+P_n-1}{2}\\
&< \frac{2P_n-1}{2}\\
&< P_n-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
P_1+P_2+\cdots+P_{n-1}+P_n &< 2P_n-\frac{1}{2}\\
N &< 2P_n
\end{aligned}$$

故に、$P_n<N<2P_n$ であることが示された。

再び、補題 2.1 から、$2(P_1+P_2+\cdots+P_{n-1})=P_{n-1}+P_n-1<N$ だから、N の表現には必ず P_n が含まれている。しかるに、既に示したように、$N<2P_n$ から、P_n は二つ使うことはできないので、唯一つ使う。よって、N の表現は、$N-P_n=N_1$ とおくと、N_1 の表現を求めることに帰着する。帰納法の仮定から、$R(N_1)=1$

だから、N の表現は唯一つである。

$\Longleftarrow$ の証明

$P_n \le N < P_{n+1}$ の場合を二つに分けて証明する。n に関する帰納法によって示す。

$n=1$ のとき、$1 \le N < 2$ だから、$N=1$ よって、$N=P_1$ したがって、成立。$n-1$ 以下のとき成立つと仮定して、n の場合に成立つことを示そう。

次の二つの場合に分ける。

(1) $P_n \le N < 2P_n$ のとき

$0 \le N-P_n < P_n$ となるので、帰納法の仮定から、$N-P_n = P_1+\cdots+P_m$ $(m<n)$ を得る。$R(N)=1$ だから、$m=n-1$ 。なぜなら、$m \le n-2$ とすると、N の次の2個の表現として、

$$\begin{aligned} N &= P_1+\cdots+P_m+P_n \\ &= P_1+\cdots+P_m+P_{n-2}+2P_{n-1} \end{aligned}$$

が存在することになり矛盾となる。

したがって、$N=P_1+\cdots+P_n$

(2) $2P_n \le N < P_{n+1}$ のとき

$0 \le N-2P_n < P_{n+1}-2P_n = P_{n-1}$ となるので、帰納法の仮定から、

$N=P_1+P_2+\cdots+P_m+2P_n$ $(m \le n-2)$ が成立つ。$m \le n-3$ とすると、N の表現が二つ得られるので、$m \le n-3$ は起こり得ない。

$m=n-2$ としよう。このときも、N の表現として、

$$\begin{aligned} N &= P_1+\cdots+P_{n-2}+2P_n \\ &= P_1+\cdots+2P_{n-2}+2P_{n-1}+P_n \end{aligned}$$

を得る。したがって、$R(N)=1$ に矛盾。ゆえに、(2) の場合は起こり得ず、よって、

$N=P_1+\cdots+P_n$ が証明された。証明終

さて、この定理から、$R(P_1+\cdots+P_n)=1$ であり、次に $R(N)$ が1となるのは、$N=P_1+\cdots+P_n+P_{n+1}$ のときであることが分かる。その間の $R(N)$ の推移をみると、対称性がみてとれる。

例えば、$R(3)=1, R(4)=2, R(5)=2, R(6)=2, R(7)=2, R(8)=1$ である。ただし、この場合は1の間に挟まる数がすべて2になっているので対称性は見えにくい。しかし、次の例では対称性がはっきりと見える。

$R(8)=1, R(9)=2, R(10)=2, R(11)=2, R(12)=3, R(13)=2$

$R(14)=4$

$R(15)=2, R(16)=3, R(17)=2, R(18)=2, R(19)=2, R(20)=1$

つまり、$R(8)=1$ からはじまって、順次 2,2,2,2,3,2 と進行し $N=14$ のときに 4 となって、「折り返して」、先ほどとは反対に進む。すなわち、2,3,2,2,2,$R(20)=1$ となるのである。

この現象を記述するのが、次の定理である。

定理 2.8

$0 \leq M \leq \left[\frac{P_{n+1}}{2}\right] \Longrightarrow R(P_1+\cdots+P_n+M)=R(P_1+\cdots+P_{n+1}-M)$

証明) $P_1+\cdots+P_n+M$ の任意の表現を $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i P_i \ (0 \leq \alpha_i \leq 2)$ とする。ただし、注意すべきは、

$\alpha_{n+1} \leq 1$ ($\because$ 補題 2.1)

一方、

$$\begin{aligned} 2(P_1+\cdots+P_n)+P_{n+1} &= (P_1+\cdots+P_n+M)+(P_1+\cdots+P_n+P_{n+1}-M) \\ 2(P_1+\cdots+P_n)+P_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i P_i+(P_1+\cdots+P_n+P_{n+1}-M) \end{aligned}$$

故に、

$$P_1+\cdots+P_n+P_{n+1}-M=(2-\alpha_1)P_1+\cdots+(2-\alpha_n)P_n+(1-\alpha_{n+1})P_{n+1}$$

そこで、$P_1+\cdots+P_n+M$ の任意の表現 $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i P_i$ に対して、$P_1+\cdots+P_n+P_{n+1}-M$ の表現 $(2-\alpha_1)P_1+\cdots+(2-\alpha_n)P_n+(1-\alpha_{n+1})P_{n+1}$ を対応させる写像を Φ とすると、明らかに単射である。

逆に、$P_1+\cdots+P_n+P_{n+1}-M$ の任意の表現 $\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i P_i \ (0 \leq \beta_i \leq 2,$ 但し、$0 \leq \beta_{n+1} \leq 1)$ に対して、$(2-\beta_1)P_1+\cdots+(2-\beta_n)P_n+(1-\beta_{n+1})P_{n+1}$ を対応させる写像を Ψ とすると、ΦとΨ は互いに逆写像であるので、それぞれ全単射である。したがって、$P_1+\cdots+P_n+M$ の表現の個数と $P_1+\cdots+P_{n+1}-M$ の個数とは一致する。証明終

本報告の最後として、次の定理を証明しよう。

定理 2.9 $R(P_n)=\left[\frac{n+2}{2}\right]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が成立つ。但し、$R(0)=1$ とする。

証明) 先ず観察をすると、

$$R(P_0)=\left[\frac{0+2}{2}\right]=1, \qquad R(P_1)=\left[\frac{1+2}{2}\right]=1$$

$$R(P_2)=\left[\frac{2+2}{2}\right]=2, \qquad R(P_3)=\left[\frac{3+2}{2}\right]=2$$

それぞれが成立することは容易にわかる。

次に、P_{n+2} の表現を考えてみよう。P_{n+2} 自身による表現が一つある。すなわち、$P_{n+2}=P_{n+2}$ さらに、$P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$. この表現では、P_{n+1} を2個使っている。しかるに、またしても、補題2.1より、

$$\begin{aligned} 2(P_1+\cdots+P_n)+P_{n+1} &= P_n+P_{n+1}-1+P_{n+1} \\ &= P_{n+2}-1 \\ &= 2P_{n+1}+P_n-1 \\ &< P_{n+2} \end{aligned}$$

となり、P_{n+1} を1個だけ使う表現は存在しない。ゆえに、P_{n+2} の表現は、$P_{n+2}=P_{n+2}$ と $P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$ の二つと次の表現がある。P_n の任意の表現 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP_i$ に対して、$P_{n+2}=2P_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_iP_i$ は P_{n+2} の表現になる。但し, P_n の表現の中に $P_n=P_n$ が含まれているので、P_{n+2} の表現の個数を数えるときには、1を引かねばならない。

したがって、$R(P_{n+2})=2+(R(P_n)-1)=R(P_n)+1$ が成立する。

これより、

$$R(P_{2n})=1+R(P_{2(n-1)})=n+R(P_0)=n+1=\left[\frac{2n+2}{2}\right]$$

$$R(P_{2n+1})=1+R(P_{2n-1})=n+R(P_1)=n+1=\left[\frac{(2n+1)+2}{2}\right]$$

ゆえに、$R(P_n)=\left[\frac{n+2}{2}\right]$ が証明された。証明終

参考文献

(1) フロリアン・カジョリ (小倉金之助補訳):カジョリの初等数学史上、酒井書店 (1955)

(2)Zeckendorf,E:Répresentation des nombres naturels par une sommme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas ,Bull.Soc.Roy.Sci.Liège,Vol.41,179-82,(1972)

(3)Hoggatt,V.E.Jr:Fibonacci and Lucas Numbers,Houghton Mifflin Company,(1969),pp 69-78

(4)Klarner,D. A:Representation of N as a sum of distinct elements from special sequences,The Fibonacci Quarterly,Vol.4.4,pp.289-305,(1966)

(5)Klarner,D. A:Partitions of N into distinct Fibonacci numbers,The Fibonacci Quarterly,Vol.6.4,pp.235-44,(1968)

(6)Carlitz,L:Fibonacci representations, The Fibonacci Quarterly,Vol.6.4,pp.193-220,(1968) (7)Bicknell,M.et al.:The Number of representations of N using distinct Fibonacci numbers,counted by recursive formulas,The Fibonacci Quarterly,Vol.37.1,pp47-60,(1999)

(8)Englund,D.A:An algorithm for determining $R(N)$ from the subscripts of the Zeckendorf representation of N, The Fibonacci Quarterly,Vol.39.3,pp250-52,(1999)

(9)Horadam,A.F:Zeckendorf representations of positive and negtive integers by Pell numbers,Applications of Fibonacci Numbers,Vol.5,pp305-316,Kluwer Academic Publishers,(1993)

(10)Horadam,A.F:Maximal representation of positive integers by Pell numbers,The Fibonacci Quarterly,Vol.32.3, pp240-44,(1994)