Fkn/Fnのゼッケンドルフの表現の一般化

著者	松下 修
雑誌名	東京商船大学研究報告. 自然科学
巻	51
ページ	1-9
発行年	2000
URL	http://id.nii.ac.jp/1342/00000553/

F_{kn}/F_n のゼッケンドルフの表現の一般化

松下 修

Generalization of the Zeckendorf representation of F_{kn}/F_n

by

Osamu MATSUSHITA

Abstract

Filiponi and Freitag obtained the Zeckendorf representation of F_{kn}/F_n for $k, n > 1$.The purpose of this paper is to generalize their result.
Let $\{X_n\}$ be a sequence defined by the second-order linear recurrence

$$X_{n+1} = aX_n + bX_{n-1}$$

where a, b are psitive integers and $X_0 = 0, X_1 = 1$.

When $b = 1$,we put $X_n = A_n$.And when $a = 2$ and $b = 1$,we put $X_n = P_n$,which is called Pell number.
We shall obtain the Zeckendorf representations of A_{kn}/A_n and P_{kn}/P_n.
Our main results are given in Theorem 3.3 and Theorem 3.4.

1 フィボナッチ数とゼッケンドルフの定理

次の漸化式で定義される数列 $\{F_n\}$ をフィボナッチ数列という。

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \ F_0 = 0,\ \ F_1 = 1$$

すなわち、$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots, \cdots$

そして、このフィボナッチ数列に現れる数をフィボナッチ数と呼んでいる。フィボナッチ数が文献に登場するのは、はるか昔の西暦 1202 年（改訂版は 1228 年）である。「Liber Abaci」という名の本において「rabbit problem」を解く過程でフィボナッチ数が現れた。著者は勿論 Fibonacci であるが、この名はあだ名で Bonaccio の息子と言う意味で、本名は leonardo である。この本は「数世紀間、数学知識の倉庫」(1) であった。

平成12年 9 月29日受付

以後、この数列は多くの数学者の研究対象とされて、膨大な数の公式や性質等が発見されることになった。このなんの変哲もない、ごく簡単な定義による数列が実に多くの美しい性質をもっていることは驚嘆に値すると共に不思議な思いにとらわれる。

さて、多くの知られている定理の中に比較的新しい定理として次のゼッケンドルフの定理がある。

定理 1.1 (Zeckendorf)[2] 任意の正の整数は次のように唯一通りに表される。

$$N=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i \quad 但し、\alpha_1=0.\alpha_i=0 \text{ または } 1(i\neq 1).\ \alpha_i\alpha_{i+1}=0$$

さらに、ごく単純素朴な定理として次のような定理がある。

定理 1.2 n,m を自然数として、$n|m$ のとき、$F_n|F_m$ が成立する。

そこで、この二つの定理を組み合わせて次のような問題が考えられる。

まず、定理 1.2 より、F_{kn}/F_n は整数となり、定理 1.1 より、フィボナッチ数の和で表すことができる。その形を求めよ。

この問題は Freitag と Filiponi[3),(4] が解決した。

そこで、この Freitag と Filiponi の結果を一般化することが本報告の目的である。

定義 1.3 $a.b>0$ とし、数列 $\{X_n\}.\{Y_n\}.\{A_n\}.\{B_n\}.\{P_n\}.\{Q_n\}$ を次の線形漸化式で定義する。

$$X_{n+1}=aX_n+bX_{n-1}, X_0=0.X_1=1$$

$$Y_{n+1}=aY_n+bY_{n-1}.Y_0=2.Y_1=a$$

特に、$b=1$ のとき、$X_n=A_n.Y_n=B_n$ と定義し、$a=2.b=1$ のとき $X_n=P_n.Y_n=Q_n$ と定義する。P_n を Pell 数という。$a=b=1$ とすると $X_n=F_n,\ Y_n=L_n$ である。ここで、L_n はルカ数である。すなわち、次の式で定義される数列である。

$$L_{n+1}=L_n+L_{n-1},\ L_0=2.\ L_1=1$$

Zeckendorf の定理が X_n に対して一般化されている。

定理 1.4[5] 任意の正の整数は次のように唯一通りに表される

$$N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

但し、各 α は整数で、$0 \leq \alpha_1 \leq a-1,\ \ 0 \leq \alpha_i \leq a \quad (i \neq 1)\alpha_n \neq 0$

$\alpha_i = a$ のとき、$0 \leq \alpha_{i-1} \leq b-1$

さらに、この表現は最小表現である。

以下において、X_{kn}/X_n を X_i の和で表したときの公式を求めて、特に $X_n = A_n$ のとき、その式を用いて、A_{kn}/A_n の Zeckenndorf の表現を求めることにする。

2 準備

本節において結論を得るためのいくつかの補題を準備しておく。

補題 2.1 (binet form) $X_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad Y_n = \alpha^n + \beta^n$ が成立する。

但し、αとβは、二次方程式 $x^2 - ax - b = 0$ の根で $\alpha > \beta$ である。

証明は容易でありまたよく知られた事実なので、省略する。

この補題より、次の二つの補題が成り立つ。

補題 2.2 n, m を自然数として、$n|m$ のとき、$X_n|X_m$ が成立する。

補題 2.3 $bX_n + X_{n+2} = Y_{n+1}$ が成り立つ。

特に、$b = 1$ のとき、すなわち、$X_n = A_n, Y_n = B_n$ のときは、

$$A_n + A_{n+2} = B_{n+1}$$

が成り立つ。

数列 $\{X_n\}$ の定義より、数学的帰納法を用いて次の定理が証明される。

定理 2.4 $n, k \geq 1$ とすとき、次の式が成立する。

k が偶数のとき

$$X_{n+k} - b^{\frac{k}{2}} X_n = a \sum_{r=1}^{\frac{k}{2}} b^{r-1} X_{n+k+1-2r}$$

k が奇数のとき

$$X_{n+k} - ab^{[\frac{k}{2}]}X_n = a\sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]} b^r X_{n+k+1-2r} + b^{[\frac{k}{2}]+1}X_{n-1}$$

3 主要結果

定理 3.1 $n, k > 0$ のとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{X_{kn}}{X_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]}(-b)^{(r-1)n}Y_{(k-2r+1)n} + \begin{cases}(-b)^{\frac{(k-1)n}{2}} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even}\end{cases}$$

証明) 補題 2.1 より、$\dfrac{X_{kn}}{X_n} = \dfrac{\alpha^{kn} - \beta^{kn}}{\alpha^n - \beta^n} = \sum_{s=1}^{k} \alpha^{(k-s)n}\beta^{(s-1)n}$

ここで、 $\alpha\beta = -b$ だから、

$$\begin{aligned}\alpha^{(k-r)n}\beta^{(r-1)n} + \alpha^{(r-1)n}\beta^{(k-r)n} &= (\alpha\beta)^{(r-1)n}\left(\alpha^{(k-2r+1)n} + \beta^{(k-2r+1)n}\right) \\ &= (-b)^{(r-1)n}Y_{(k-2r+1)n}\end{aligned}$$

したがって、$\dfrac{X_{kn}}{X_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]}(-b)^{(r-1)n}Y_{(k-2r+1)n} + \begin{cases}(-b)^{\frac{(k-1)n}{2}} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even}\end{cases}$

証明終

$b = 1$ とすれば、次の系の 1 が、$a = 2, b = 1$ とすると, 系の 2 が得られる。

系 3.2 $n, k > 0$ のとき、次の式が成り立つ。

1.
$$\frac{A_{kn}}{A_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^{(r-1)n}B_{(k-2r+1)n} + \begin{cases}(-1)^{\frac{(k-1)n}{2}} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even}\end{cases}$$

2.
$$\frac{P_{kn}}{P_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^{(r-1)n}Q_{(k-2r+1)n} + \begin{cases}(-1)^{\frac{(k-1)n}{2}} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even}\end{cases}$$

系 3.2 から、n が偶数のときの、A_{kn}/A_n と P_{kn}/P_n の Zeckendorf の表現は容易に求まる。それが次の定理 3.3 である。

定理 3.3 $n, k > 0$ で、n が偶数のとき、次式が成立する。

1.
$$\frac{A_{kn}}{A_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]} \left(A_{(k-2r+1)n+1} + (A_{(k-2r+1)n-1}\right) + \begin{cases} A_1 & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}$$

2.
$$\frac{P_{kn}}{P_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]} \left(P_{(k-2r+1)n+1} + (P_{(k-2r+1)n-1}\right) + \begin{cases} P_1 & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}$$

証明) 2は1からただちに従うので、1を示せば充分である。

系 3.2 から、

$$\frac{A_{kn}}{A_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^{(r-1)n} B_{(k-2r+1)n} + \begin{cases} (-1)^{\frac{(k-1)n}{2}} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}$$

補題 2.3 より、$B_{(k-2r+1)n} = A_{(k-2r+1)n+1} + A_{(k-2r+1)n-1)}$ 及び n が偶数であることから、結論が得られる。

n が奇数のときは、偶数のときに比べて複雑である。その結果が次の定理 3.4 である。

定理 3.4 $n, k > 0$ で、n が奇数のとき、次式が成立する。

1.
$$\frac{A_{kn}}{A_n} = S_{k,n} + e_{k,n}$$

ここで、

$$\begin{aligned} S_{k,n} = \sum_{r=0}^{[\frac{k}{4}]-1} \Big\{ & A_{(k-4r-1)n+1} + a \sum_{s=1}^{n-2} A_{(k-4r-1)n-2s} + (a-1) A_{(k-4r-3)n+2} \\ & + a A_{(k-4r-)n+1} + (a-1) A_{(k-4r-3)n-1} + A_{(k-4r-3)n-2} \Big\} \end{aligned}$$

$$e_{k,n} = \begin{cases} 0 & k \equiv 0 \pmod 4 \\ A_1 & k \equiv 1 \pmod 4 \\ A_{n+1} + A_{n-1} & k \equiv 2 \pmod 4 \\ A_{2n+1} + a \sum_{r=1}^{n-1} A_{2n-2r} & k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

2.

$$\frac{P_{kn}}{P_n} = S_{k,n} + e_{k,n}$$

ここで、

$$S_{k,n} = \sum_{r=0}^{[\frac{k}{4}]-1} \Big\{ P_{(k-4r-1)n+1} + 2\sum_{s=1}^{n-2} P_{(k-4r-1)n-2s} + P_{(k-4r-3)n+2}$$
$$+ 2P_{(k-4r-3)n+1} + P_{(k-4r-3)n-1} + P_{(k-4r-3)n-2} \Big\}$$

$$e_{k,n} = \begin{cases} 0 & k \equiv 0 \pmod 4 \\ P_1 & k \equiv 1 \pmod 4 \\ P_{n+1} + P_{n-1} & k \equiv 2 \pmod 4 \\ P_{2n+1} + 2\sum_{r=1}^{n-1} P_{2n-2r} & k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

証明）2 は 1 から容易に導かれるので 1 を証明する。

系 3.2 と n が奇数であることから、、

$$\frac{A_{kn}}{A_n} = \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^{(r-1)} B_{(k-2r+1)n} + \begin{cases} (-1)^{\frac{(k-1)n}{2}} & k \text{ odd} \\ 0 & k \text{ even} \end{cases}$$

$k \geq 4$ のとき、補題 2.3 より

$$B_{(k-1)n} - B_{(k-3)n} = A_{(k-1)n+1} + A_{(k-1)n-1} - A_{(k-3)n+1} - A_{(k-3)n-1}$$

ここで、$\{(k-1)n-1\} - \{(k-3)n+1\} = 2n-2$ であることに注意して、

定理 2.4 を用いると、

$$A_{(k-1)n-1} - A_{(k-3)n+1} = a\sum_{s=1}^{n-1} A_{(k-1)n-2s}$$

したがって、

$$B_{(k-1)n} - B_{(k-3)n} = A_{(k-1)n+1} + a\sum_{s=1}^{n-1} A_{(k-1)n-2s} - A_{(k-3)n-1}$$

しかるに、

$$\begin{aligned} a\sum_{s=1}^{n-1} A_{(k-1)n-2s} &= a\sum_{s=1}^{n-2} A_{(k-1)n-2s} + aA_{(k-3)n+2} \\ &= a\sum_{s=1}^{n-2} A_{(k-1)n-2s} + (a-1)A_{(k-3)n+2} + aA_{(k-3)n+1} + A_{(k-3)n} \\ &= a\sum_{s=1}^{n-2} A_{(k-1)n-2s} + (a-1)A_{(k-3)n+2} \\ &\quad +aA_{(k-3)n+1} + aA_{(k-3)n-1} + A_{(k-3)n-2} \end{aligned}$$

それ故に、

$$B_{(k-4r-1)n}-B_{(k-4r-3)n}=A_{(k-4r-1)n+1}+a\sum_{s=1}^{n-1}A_{(k-4r-1)n-2s}+(a-1)A_{(k-4r-3)n+2}$$
$$+aA_{(k-4r-3)n+1}+(a-1)A_{(k-4r-3)n-1}+A_{(k-4r-3)n-2}$$

以上に考察から、$k/2$ が偶数のとき、すなわち、k が 4 の倍数のときは、$k=4m$ とすれば、

$$\frac{A_{kn}}{A_n}=\sum_{r=1}^{m}\left(B_{(k-4r+3)n}-B_{(k-4r-1)n}\right)$$

したがって、

$$\frac{A_{kn}}{A_n}=\sum_{r=0}^{[\frac{k}{4}]-1}\Big\{A_{(k-4r-e1)n+1}+a\sum_{s=1}^{n-1}A_{(k-4r-1)n-2s}+(a-1)A_{(k-4r-3)n+2}$$
$$+aA_{(k-4r-3)n+1}+(a-1)A_{(k-4r-3)n-1}+A_{(k-4r-3)n-2}\Big\}$$

よって、

$$\frac{A_{kn}}{A_n}=S_{k,n}$$

次に、$k=4m+1$ のときを考えよう。このときは、$\left[\frac{k}{2}\right]=2m$ だから、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{A_{kn}}{A_n}&=\sum_{r=1}^{2m}(-1)^{(r-1)}B_{(k-2r+1)n}+1\\&=\sum_{r=1}^{m}\left(B_{(k-4r+3)n}-B_{(k-4r-1)n}\right)+A_1\\&=S_{k,n}+A_1\end{aligned}$$

次に、$k=4m+2$ のときを考察する。

上二つの場合と同様にして、

$$\frac{A_{kn}}{A_n}=\sum_{r=1}^{m}\left(B_{(k-4r+3)n}-B_{(k-4r-1)n}\right)+B_n$$

故に補題 2.3 から、

$$\frac{A_{kn}}{A_n}=S_{k,n}+A_{n+1}+A_{n-1}$$

最後に、$k=4m+3$ の場合を考えよう。この場合も同様にして, 次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{A_{kn}}{A_n} &= \sum_{r=1}^{2m+1}(-1)^{(r-1)}B_{(k-2r+1)n}-1 \\
&= \sum_{r=1}^{2m}(-1)^{(r-1)}B_{(k-2r+1)n}+B_{2n}-1 \\
&= \sum_{r=1}^{2m}(-1)^{(r-1)}B_{(k-2r+1)n}+A_{2n+1}+A_{2n-1}-A_1 \\
&= S_{k,n}+A_{2n+1}+a\sum_{r=1}^{n-1}A_{2n-2r}
\end{aligned}$$

$A_{2n-1}-A_1=a\sum_{r=1}^{n-1}A_{2n-2r}$ は定理 2.4 を用いている

以上で k のすべての場合について証明した。

4 最後に

前節において、A_{kn}/A_n と P_{kn}/P_n の Zeckendorf の表現の形は決定されたが、もっと一般の場合、すなわち X_{kn}/X_n の Zeckendorf の表現の形は求めることが望ましいが、このときは $b\neq 1$ であることから本質的のかなり困難と思われる。今後の課題である。

参考文献

(1) フロリアン・カジョリ (小倉金之助補訳):カジョリの初等数学史上、酒井書店 (1955)

(2)Hogatt,V.E.Jr:Fibonacci and Lucas Numbers,Houghton Mifflin Campany,(1969),pp 69-78

(3)Filipponi,P and Freitag,T:The Zeckendorf representation of $\{F_{kn}/F_n\}$ In Applications of Fibonacci Numbers 5,Kluwer1993,pp217-19

(4)Filipponi,P and Freitag,T :On the Zeckendorf Form of F_{kn}/F_n.The fibonacci Quarterly,Vol.34.5,pp444-446,(1996)

(5) 松下　修：ゼッケンドルフの定理の一般化．東京商船大学研究報告 (自然科学) 第46号 pp13-18,(1996)