ゼッケンドルフの定理の一般化 II

著者	松下 修
雑誌名	東京商船大学研究報告. 自然科学
巻	48
ページ	49-54
発行年	1998
URL	http://id.nii.ac.jp/1342/00000551/

ゼッケンドルフの定理の一般化Ⅱ

松下　修

The Generalization of Zeckendorf's theorem Ⅱ

OSAMU MATSUSHITA

Abstract

Let $\{F_n\}$ be the sequence satisfying the recurrence relation $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ and $F_0=0$, $F_1=1$. $\{F_n\}$ is called Fibonacci sequence and each member F_n is a Fibonacci number. A huge amount of theorems and formulas about the property of Fibonacci numbers are known.

Zeckendof's theorem is one of those theorems which asserts that every positive integer can be represented uniquely as a sum of distinct noncosecutive Fibonacci numbers.

Bunder considered the representation of negative integer and he showed that every negtive integer also can be represented uniqely as a sum of nonconsecutive Fibonacci numbers F_n where $n<0$.

In this paper we shall generalize the Bunder's theorem. Let $\{X_n\}$ be the sequence satisfying the recurrence relation ; $X_{n+2}=aX_{n+1}+X_n$ where a is a positive integer and $X_0=0$, $X_1=1$.

We shall show here that any integer N can be represented uniquely as follows; $N=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_{-i}$, where each α_i is a positive integer $0\leqq\alpha_i\leqq a$ and if $\alpha_i=a$ then $\alpha_{i+1}=0$.

1．フィボナッチ数とゼッケンドルフの定理

次の漸化式で定義される数列$\{F_n\}$をフィボナッチ数列という。

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $F_1=1$, $F_2=1$

すなわち，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……

そして，フィボナッチ数列に現れる数をフィボナッチ数という。このフィボナッチ数が文献に登場したのは，西暦1202年である。著者は勿論フィボナッチであるが，フィボナッチとはあだ名で本名はレオナルド・ピサノ・ビゴロという。以後この数列はたくさんの数学者の研究対象とされて，膨大な数の公式，性質が発見されることになった[1]。

このなんの変哲もない，ごく自然な構成の数列が多くの美しい性質を持っていることは驚嘆に値すると同時に不思議な思いにとらわれる。

フィボナッチ数に関する定理は古くから数多く知られているが，そのなかで比較的新しい定理としてゼッケンドルフの定理がある。

定理(Zeckendorf)[2],[3]任意の正の整数Nは次のように唯一通りに表される。

$$N=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$$

ただし，α_iは整数で，$\alpha_1=0$，$\alpha_i=0$ or 1，$\alpha_i\alpha_{i-1}=0$とする。

この定理は任意の正の整数はフィボナッチ数の和として表すことができること。そして，その表す方法は一通りには限らないが等式α_iに上記のごとき条件を課せばその表し方は唯一通りになることを主張している。

平成9年9月25日受付

以下，簡単のために正の整数をフィボナッチ数の和で表すときのその表し方を表現と呼ぶことにする。ゼッケンドルフの定理に於ける α_i に関する上記の条件の $\alpha_i\alpha_{i-1}=0$ を付けなければ，表現は唯一通りでなくなるが，勿論，表現は有限個だから，表現に現れるフィボナッチ数の個数が最大のときと最小のときが考えられる。前者を最大表現，後者を最小表現という。そして，如何なるときに最大表現となり，最小表現とするかという問題が(3)において，研究され解決を見た。このようにして，正の整数をフィボナッチ数で表すことについては一応の区切りはついたのであるが，最近 Bunder[4]は**負の整数**も「フィボナッチ数」の和で表すことができることを示した。このことを説明するために負の添数のついたフィボナッチ数について定義しておく必要がある。

フィボナッチ数を定義する漸化式は $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ であった。これを変形すると，$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n$ をえる。この式に，$n=1$ とおけば，$F_0=F_2-F_1=0$，$n=0$ とおけば，$F_{-1}=F_1-F_0=1$，$n=-1$ とおけば，$F_{-2}=F_0-F_{-1}=-1$ と繰り返していけば，負の整数 n に対してフィボナッチ数 F_n が定義できることとなり，もともとのフィボナッチ数とあわせれば，すべての整数 n に対してフィボナッチ数 F_n が定義される。

容易に分かることだが，$F_n=(-1)^{n+1}F_{-n}$ が成立する。

Bunder は任意の整数がこれらの $F_n(n<0)$ の和で書けることを証明した。続いて，Horadam[5],[6],[7]は Bunder の結果をペル数の場合に一般化した。ペル数とは次の漸化式で定義される数である。

$P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$，$P_0=0$，$P_1=1$

2．主要定理の証明

本説で Bunder の結果をさらに，一般化する。

定義2.1 $\{X_n\}$ $(n\in\mathbf{Z})$ をつぎの漸化式を満たす数列とする。ただし，a は正の整数。

$X_{n+1}=aX_n+X_{n-1}$，$X_1=1$，$X_2=a$

次の補題は数学的帰納法で容易に証明できる。

補題2.2 任意の整数 n にたいして，$X_n=(-1)^{n+1}X_{-n}$ が成立する。

さらに，次の補題も必要となる。

補題2.3 次の等式が成立する。$n\geqq 1$ のとき，

$(a-1)X_{n-1}+aX_{n-2}+\cdots\cdots+aX_0=X_n-1$

証明）n に関する数学的帰納法で示す。

$n=1$ のときは明らか。$n=k$ のときに真であると仮定する。

$n=k+1$ のとき。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=(a-1)X_{n-1}+aX_{n-2}+\cdots\cdots+aX_0\\
&=(a-1)X_k+aX_{k-1}+\cdots\cdots+aX_0\\
&=(a-1)X_k+X_{k-1}+(a-1)X_{k-1}+aX_{k-2}+\cdots\cdots+aX_0
\end{aligned}
$$

ここで，帰納法の仮定より，

左辺$=(a-1)X_k+X_{k-1}+X_k-1=aX_k+X_{k-1}-1=X_{k+1}-1$ となって，$n=k+1$ のとも真であることがいえた。したがって，補題はすべての n にたいして成立する。

さて，つぎの定理が本報告の主要定理である。

定理2.4 任意の零と異なる整数 N は次のように唯一通りに表される。

$N=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_{-i}$

ただし，各 α_i は整数で，$0\leqq\alpha_i\leqq a$，$\alpha_i=a$ のとき，$\alpha_{i+1}=0$

証明）最初に，N が上のように書けることを証明する。$a=1$ のときは，すでに証明されているので，以下 $a\neq 1$ とする。

ある整数nがあって，$|N|=X_n$であるときは次のようにして確かめられる。

$N>0$とする。$N=X_{2k+1}(2k+1>0)$のときは補題2.2によって，$X_{2k+1}=X_{-(2k+1)}$だから，$N=X_{-(2k+1)}$を得る。

$N=X_{2k}$のときは，X_nの定義の漸化式を繰り返して用いて，

$$\begin{aligned}N&=X_{2k}\\&=aX_{2k-1}+X_{2k-2}\\&=aX_{2k-1}+aX_{2k-3}+X_{2k-4}\\&=aX_{2k-1}+aX_{2k-3}+\cdots\cdots+aX_1\\&=aX_{-(2k-1)}+aX_{-(2k-3)}+\cdots\cdots+aX_{-1}\end{aligned}$$となる。

つぎに，$N<0$とする。

$N=-X_{2k}(2k>0)$のときは，補題2.2によって，$-X_{2k}=X_{-2k}$だから，$N=X_{-2k}$となる。

$N=-X_{2k+1}(2k+1>0)$のときは，補題2.2によって$N=-X_{-2k-1}$が成り立つことに注意する。

一方，漸化式より，　$X_{-2k}=aX_{-2k-1}+X_{-2k-2}$が成立しているので

$$-X_{-2k-1}=X_{-2k-2}+(a-1)X_{-2k-1}-X_{-2k}$$

$$N=X_{-2k-2}+(a-1)X_{-2k-1}-X_{-2k}$$

ここで，$-X_{-2k}=X_{2k}$だから，すでに示したように，$2k>0$ならば，

$N=X_{-2k-2}+(a-1)X_{-2k-1}+aX_{-(2k-1)}+aX_{-(2k-3)}+\cdots\cdots+aX_{-1}$また$2k=0$

ならば，$N=X_{-2k-2}+(a-1)X_{-2k-1}$となっていづれの場合も定理は成立する。

したがって，任意のnにたいして，$|N|\neq X_n$なるときに定理が成立することを証明するとよい。

そのために次のアルゴリズムによって定理の主張のように表されることを示す。

《アルゴリズム》 整数Nが与えられたとき，NをX_{-i}たちで表す方法は以下の通りである。

(1) $N=kX_{-i}(1<k\leqq a)$と書けたらおしまい。

(2) $N>0$のときは，次の二通り。

i．$X_{2k}<N<X_{2k+1}$ ⇨ $N=X_{-2k-1}+(N-X_{-2k-1})$，$A(N)=N-X_{-2k-1}$とする。

ii．$X_{2k-1}<N<X_{2k}$ ⇨ $N=X_{-2k+1}+(N-X_{-2k+1})$，$A(N)=N-X_{-2k+1}$とする。

(3) $N<0$のときも，次の二通り。

i．$X_{2k-1}<|N|<X_{2k}$ ⇨ $N=X_{-2k}+(N-X_{-2k})$，$A(N)=N-X_{-2k}$とする。

ii．$X_{2k}<|N|<X_{2k+1}$ ⇨ $N=X_{-2k}+(N-X_{-2k})$，$A(N)=N-X_{-2k}$とする。

補題2.5　以上のアルゴリズムを繰り返し適用することによって，任意の整数Nは定理2.2のように表すことができる。

すなわち，$A(A(\cdots(A(N)\cdots)=0$

証明）以下，$A(A(N))=A^2(N)$，$A(A^2(N))=A^3(N)$，……，$A(A^{n-1}(N))=A^n(N)$　と書くことにする。

Nを任意の整数とする。適当なnが存在して，$X_n<|N|<X_{n+1}$。

そこで，nに関する数学的帰納法で証明する。

$n=1$のとき，すなわち，$1<|N|<a$のときである。

$N>0$の場合。$N=NX_{-1}$となる。

$N<0$の場合。$-a<N<-1$だから，アルゴリズムの(3)のiによって，$N=X_{-2}+(N+a)X_{-1}$と表される。そして，$0<N+a\leqq a-1$も満たしている。

$n-1$以下のときなりたつと仮定して，nのとき真であることを示そう。

アルゴリズム(2)のiiときは，$n=2k-1$で，$A(N)<N<X_{2k}$となる。$X_{2k-1}<A(N)$ならば，$A^2(N)$をつくる。$X_{2k-1}<A^2(N)$なら，漸化式より，$A^3(N)<X_{2k-1}$を得る。したがって，$1\leqq\alpha\leqq3$を満たすαが存在し

て，$N-\alpha X_{-2k+1}<X_n$だから，帰納法の仮定より$N-\alpha X_{-2k+1}$にたいして補題が成立し，したがって，Nにたいしても成立する。

アルゴリズム(3)のⅰのときも事情はよく似ていて$1\leqq\alpha\leqq 3$を満たすαが存在して$|N-\alpha X_{-2k}|<X_{2k-1}$とできる。したがって，帰納法の仮定により，$N-\alpha X_{-2k}$にたいして補題が成り立ち，よって$N$にたいしても補題が成り立つ。

つぎにアルゴリズム(2)のⅰの場合を考えよう。すなわち，$n=2k$で，$X_{2k}<N<X_{2k+1}$のときである。まず，補題2.2より，$X_{2k+1}=X_{-2k-1}$だから，$A(N)=N-X_{-2k-1}<0$，故に，$|A(N)|=X_{-2k-1}-N<X_{2k+1}$。

このとき，$|A(N)|<X_{2k}=X_n$ならば，帰納法の仮定より補題が成立する。$X_{2k}<|A(N)|$ならば，アルゴリズム(3)のⅱに帰着される。

最後に，アルゴリズム(3)のⅰ場合。

$n=2k-1$で，$X_{2k-1}<-N<X_{2k}$のときである。補題2.2より，$X_{2k}=-X_{-2k}$だから，$-N<-X_{-2k}$。故に，$0<N-X_{-2k}=A(N)<X_{2k}$。このとき，$A(N)<X_{2k-1}=X_n$ならば，帰納法の仮定より補題が成立。

$X_{2k-1}<A(N)$ならば，アルゴリズム(2)のⅰに帰着する。このときは既に成立を確かめたので，補題2.5の証明が完結した。

以上で，定理の主張の「半分」が示されたので，次に表現の一意性を証明しよう。

$$N=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_{-i}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j X_{-j} \qquad (2.1)$$

とする。

ただし，α_iとβ_jは定理の条件を満たすものとし，$\alpha_n\neq 0$，$\beta_m\neq 0$とする。$n=m$と$\alpha_n=\beta_n$を証明すれば表現の一意性は従う。

$n\geqq m$と仮定してよい。$n=m$を示すために，$n>m$として矛盾を導こう。$n>m$としたので，式(2.1)は，

$$\alpha_n X_{-n}+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i X_{-i}=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_i X_{-i} \qquad (2.2)$$

とかける。ただし，$\beta_{m+1}=\beta_{m+2}=\cdots=\beta_{n-1}=0$とする。

nが奇数と偶数の場合にわけて考える。

nが奇数のときは，左辺のX_kで，kが偶数の項を右辺へ，同様に，右辺のX_kで，kが偶数の項を左辺へ移項すると，

$$\alpha_n X_{-n}+\sum_{i:\mathrm{odd}}\alpha_i X_{-i}-\sum_{i:\mathrm{even}}\beta_i X_{-i}=\sum_{i:\mathrm{odd}}\beta_i X_{-i}-\sum_{i:\mathrm{even}}\alpha_i X_{-i} \qquad (2.3)$$

補題2.2より，

$$\alpha_n X_n+\sum_{i:\mathrm{odd}}\alpha_i X_i+\sum_{i:\mathrm{even}}\beta_i X_i=\sum_{i:\mathrm{odd}}\beta_i X_i+\sum_{i:\mathrm{even}}\alpha_i X_i \qquad (2.4)$$

ここで，式(2.4)の両辺の評価を行う。

左辺$\geqq X_n$は明らかである。

つぎに，右辺の評価である。右辺のX_{n-1}の係数はα_iの仮定から，$a-1\geqq\alpha_{n-1}$である。X_{n-2}の係数はβ_{n-2}で同様の仮定より，$a\geqq\beta_{n-2}$である。以下，α_i，β_jの仮定に注意すれば，$X_k(n-1\geqq k)$の係数は高々aである。したがって，右辺$\leqq(a-1)X_{n-1}+aX_{n-2}+aX_{n-3}+\cdots\cdots+aX_1$

ここで，補題2.3より，右辺$\leqq X_n-1$を得る。故に，右辺<左辺となり，矛盾である。

nが偶数のときも，式(2.2)の左辺のX_kで，kが偶数の項を右辺へ，同様に，右辺のX_kで，kが偶数の項を左辺へ移項すると，

$$\sum_{i:\mathrm{odd}}\alpha_i X_{-i}-\sum_{i:\mathrm{even}}\beta_i X_{-i}=-\alpha_n X_{-n}+\sum_{i:\mathrm{odd}}\beta_i X_{-i}-\sum_{i:\mathrm{even}}\alpha_i X_{-i}$$

補題2.2より，

$$\sum_{i:\mathrm{odd}}\alpha_i X_i+\sum_{i:\mathrm{even}}\beta_i X_i=\alpha_n X_n+\sum_{i:\mathrm{odd}}\beta_i X_i+\sum_{i:\mathrm{even}}\alpha_i X_i \qquad (2.5)$$

nが奇数のときと同様に式(2.5)の両辺の評価をおこなって，左辺$\leqq X_{n-1}-1<X_n\leqq$右辺を得て矛盾を生じる。
以上のことから，$n=m$がいえた。
つぎに，$\alpha_n=\beta_n$を示す。$\alpha_n\geqq\beta_n$としてよい。
式(2.1)より，$(\alpha_n-\beta_n)X_n+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i X_{-i}=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j X_{-j}$
$n=m$を証明したときと同様の議論により，$\alpha_n-\beta_n=0$を得る。よって，$\alpha_n=\beta_n$
以上で，定理の証明は完結した。

3．計算例

最後にいくつかの例を計算してみよう。
$a=3$とする。したがって，$X_{n+2}=3X_{n+1}+X_n$，$X_1=1$，$X_2=3$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_n	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837
X_{-n}	1	3	10	-33	109	-360	1189	-3927	12970	-42837

例1　$N=53$とする。

$$\begin{aligned}53&=109+(53-109) &&(53\text{に}(2)\text{の i を適用})\\ &=109+(-56) &&(-56\text{に}(3)\text{の ii を適用})\\ &=109+(-33)+(-23) &&(-23\text{に}(3)\text{の i を適用})\\ &=109+(-33)+(-33)+10\\ &=X_{-5}+2X_{-4}+X_{-3}\end{aligned}$$

例2　$N=180$とする。

$$\begin{aligned}180&=109+71=109+2\cdot33+5=109+2\cdot33+10+(-5)\\ &=109+2\cdot33+10+(-3)+(-2)\\ &=109+2\cdot33+10+(-3)+(-3)+1\\ &=X_{-5}+2X_{-4}+X_{-3}+X_{-2}+X_{-1}\end{aligned}$$

例3　$N=-53$とする。

$$\begin{aligned}-53&=-33+(-20)=-33+(-33)+13=2\cdot(-33)+10+3\\ &=2X_{-4}+X_{-3}+X_{-2}\end{aligned}$$

例4　$N=-200$とする。

$$\begin{aligned}-200&=-360+160=-360+109+51\\ &=-360+109+109+(-58)\\ &=-360+2\cdot109+(-33)+(-25)\\ &=-360+2\cdot109+(-33)+(-33)+8\\ &=-360+2\cdot109+2\cdot(-33)+10+(-2)\\ &=-360+2\cdot109+2\cdot(-33)+10+(-3)+1\\ &=X_{-6}+2X_{-5}+2X_{-4}+X_{-3}+X_{-2}+X_{-1}\end{aligned}$$

参考文献

(1) Hogatt, V. E. Jr.: Fibonacci and Lucas Numbers. Houghton Mifflin Campany, (1969)

(2) Brown, J. L. Jr.: Zeckendorf's Theorem and Some Applications, The Fibonacci Quartely, Vol.2.3, pp163-168, (1964)

(3) Brown, J. L. Jr.: A New Characterization of the Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, Vol.3.1, pp1-8, (1965)

(4) Bunder, M. W: Zeckendorf Representation Using Negative Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, Vol.30.2, pp111-115, (1992)

(5) Horadam, A. F.: Maximal Representation of Posittive Integers by Pell Numbers. The Fibonacci Quarterly, Vol.32.3, pp240-244, (1994)

(6) Horadam, A. F.: Zeckendorf Representation of Positive and Negative in tegers by Pell numbers, Application of Fibonacci Numbers Vol.5, pp305-316, Kluwer Academic Publishers, (1992)

(7) Horadam, A. F.: Unique Minimal representation of Integers by Negatively Subscripted Pell Numbers, The Fibonacci Quarterly, Vol.32.3, pp202-206, (1994)