結合系の振動と非線形性

修士学位論文

結合系の振動と非線形性

平成27年度

(2016年3月)

東京海洋大学大学院
海洋科学技術研究科
海洋環境保全学専攻

西村　仁孝

[修士]

修士学位論文内容要旨
Abstract

専　攻 Major	海洋環境保全学専攻	氏　名 Name	西村 仁孝
論文題目 Title	結合系の振動と非線形性		

本論文の目的は、減衰振動を含む非線形振動の逆問題解析を行い、振動を生ずる非線形性を振動の観測データから決定する数学理論を構築することにある。モデル方程式として、速度が正のときの運動と速度が負のときの運動を組み合わせた次の速度互換型結合系

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + g_1(u) = 0, & \frac{du}{dt} \geq 0, \\ \frac{d^2u}{dt^2} + g_2(u) = 0, & \frac{du}{dt} < 0, \end{cases}$$

を考える。この方程式は Coulomb 摩擦モデル方程式

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + ku + f(u) = 0, & \frac{du}{dt} \geq 0, \\ \frac{d^2u}{dt^2} + ku - f(u) = 0, & \frac{du}{dt} < 0, \end{cases}$$

の一般形である。

論文では、速度互換型結合系の (g_1, g_2) は、振動の振幅に周期を対応させる周期対応関数の組 $(T_1(A), T_2(A))$ およびペアリング関数の組 (σ_1, σ_2) から同定されること（同定可能定理）を証明するとともに、これらの観測データから (g_1, g_2) を定める次の手順（再構成法）を与えた。

手順 1 積分方程式 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k \frac{T_1(x(s))}{\sqrt{k-s}} ds = x(k)$ を解いて $x(k)$ を求める。

手順 2 手順 1 で求めた $x(k)$ から $x(k) = \frac{x_1^+(k) - x_1^-(k)}{2}$ (ただし $x_1^- = \sigma(x_1^+)$) により $x_1^\pm$ を定め、逆関数を $G_1^\pm$ とし、その導関数として g_1 を求める。

手順 3 同様のことを (T_2, σ_2) に対して行い、g_2 を求める。

この同定可能定理と再構成法は、Opial (1961), Urabe (1964) らによって研究された周期運動のときの問題（逆周期対応関数問題）に対する Kamimura and Kaneya (2013) の結果の一般化であり、減衰振動等に対する逆周期対応関数問題の研究に対する指針を与えている。

論文ではまた、Coulomb 摩擦モデル方程式に対する次の定理を得た：Coulomb 摩擦モデル方程式が等時周期運動を実現する f は線形のものに限る。この結果は、Mañosas and Torres (2008) の大域的な一般化を与えるとともに、Coulomb 摩擦の特性を明確にした。

上記で述べた定理を得るためのアイデアは、いくつかの典型的な具体例に対する楕円関数等を用いた解析に基づいている。これらの計算過程および結果も論文で詳述した。

目次

1　はじめに

本論文の目的は、結合系の振動の観測からその非線形性の決定を行うことにある。

1.1　問題

非線形性を有する周期運動の逆問題はUrabe[10]によって系統的に研究が開始され、Kamimura and Kaneya[4]で1つの最終解答が与えられ、決着がつけられた。だが、（摩擦項を含むような）より一般の問題に対しては、復元力および摩擦の決定の問題すなわち周期運動の観測量（例えば周期と振幅）からこれらの力を決定する問題の研究は初期段階にとどまっている。

そんな中で摩擦項決定の意識のもとに、結合系微分方程式で支配される運動の観測から、その微分方程式の非線形項を定める研究がなされ始めた (Deimling and Szilágyi [1], Mañosas and Torres [5])。これらの論文で扱われた方程式を一般的に書くと、

$$\begin{cases} \ddot{u} + g_1(u) = 0, & \dot{u} \geq 0, \\ \ddot{u} + g_2(u) = 0, & \dot{u} < 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

である (ただし、$\ddot{} = \frac{d^2}{dt^2}$)。例えば、Coulomb摩擦 (速度に対し一定の摩擦) が働く系 ([7, P.75], [8, P.331] 参照) の典型として

$$\ddot{u} + ku + (\operatorname{sgn} \dot{u}) f(u) = 0 \tag{1.2}$$

を例に挙げる。

本論文では (1.1) および (1.2) に対し、次の問題を考える。

問題 1.1 振動におけるどのような観測量から (1.1) の (g_1, g_2) は決定できるか。

一般のモデリングにおいては、非線形項を既知として与え、それに支配される運動の解析を行い、これによりモデリングの正当性を計るが、概して、これらの非線形項は本来仮説に過ぎず、実際には観測データから直接、非線形項を決定または推定するという観点が重要であることが近年の研究により明らかにされている（総論については [2] 参照）。結合系の振動と非線形性についてこの観点から設定されたものが問題1.1であり、典型的な逆問題と言える。

(1.2) は (1.1) で

$$\begin{cases} g_1(u) = ku + f(u), \\ g_2(u) = ku - f(u), \end{cases}$$

として定式化されたものであるが、これに対し、Manosas and Torres [5] は力学系の興味から次の問題を扱った。

問題 1.2 (1.2) の振動が等時となる f を決定せよ。

本論文では問題1.1および問題1.2に一般的な解答を与える。その解答は項1.2で定式化する。また論証を第2節で与える。

1.2 主結果

本論文の主要な結果を述べる。

次は項 1.1 で述べた問題に対する再構成法を与えるものである。定理中に述べる仮定のもとで (g_1, g_2) の存在にも言及している。

定理 1.1 振動におけるその半周期 $T_1(A), T_2(A)$ と pairing 関数 σ の組 $(T_1(A), T_2(A), \sigma_1, \sigma_2)$（ただし $0 < A \leq A_{max}$）が与えられたとき (図 1 参照)、次の手順で (g_1, g_2) を定める。ただし、$T_1(A), T_2(A)$ は Lipschitz 連続で、σ は C^1 対合）（すなわち、σ は $\sigma \circ \sigma =$ 恒等写像、を満たす C^1 級関数）と仮定する。

Step1 積分方程式

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^k \frac{T_1(x(s))}{\sqrt{k-s}} ds = x(k), 0 \leq k \leq {}^{\exists}E_{max} \tag{1.3}$$

を解いて $x(k)$ を求める（ただし、ここで E_{max} は $x'(k) > 0$ を保障する範囲の最大値である）。

Step2 Step1 で求めた $x(k)$ から

$$x(k) = \frac{x_1^+(k) - x_1^-(k)}{2} \quad \text{ただし} \quad x_1^- = \sigma_1(x_1^+)$$

により $x_1^{\pm}(k)$ を定める。そして、$x_1^{\pm}(k)$ の逆関数を $G_1^{\pm}(u)$ とし、

$$g_1(u) = \begin{cases} (G_1^+)'(u), & u \geq 0, \\ (G_1^-)'(u), & u \leq 0, \end{cases}$$

により $g_1(u)$ を定める。

Step3 同様のことを (T_2, σ_2) に対して行い $g_2(u)$ を定める。

このとき、この $g_1(u), g_2(u)$ に対し $(T_1(A), T_2(A), \sigma_1, \sigma_2)$ が実現される。

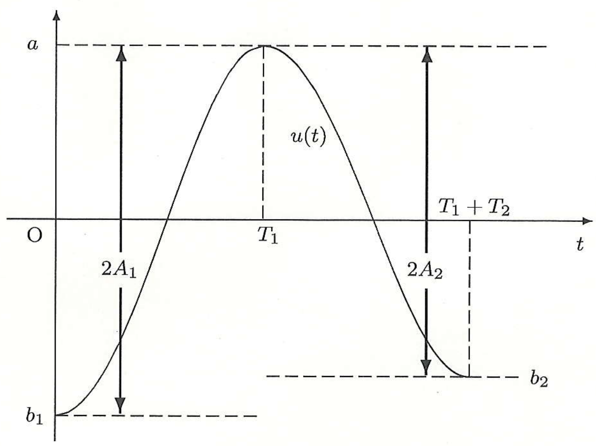

図 1:

上は $(T_1(A), T_2(A), \sigma_1, \sigma_2)$ を実現する (g_1, g_2) の存在を保証している。実は、次で示すようにその (g_1, g_2) は一意である。

定理 1.2 観測された $(T_1, T_2, \sigma_1, \sigma_2)$ を実現する結合系 $g = (g_1, g_2)$ はただひとつである。すなわち、$g = (g_1, g_2)$ および $h = (h_1, h_2)$ が $(T_1, T_2, \sigma_1, \sigma_2)$ を実現するなら、$g_1 = h_1, g_2 = h_2$ である。

定理 1.1、定理 1.2 において $\sigma_1 = \sigma_2$ のときは結合系 (1.1) の引き起こす運動は周期運動（すなわち、力学系の言葉では 0 を center とする運動）になる。この場合の運動の中で特に等時、すなわち周期が振幅によらない運動は古来より研究者の注意を惹いてきた。この場合には、定理 1.1 の σ_2 は σ_1 と等しくなるのでこれらを σ と書くと、定理 1.1 から次がしたがう。

系 1.1 等時の周期を ω とする。このとき、与えられた半周期 $T_1(A)$ と σ から g_1, g_2 は再構成される。

次に問題 1.2 に対する結果を記す。簡単のために (1.2) で $k = 1$ とする。

定理 1.3 (1.2) で $f \in C^2, f(0) = 0$ とする。また

$$\left| \frac{f(u)}{u} \right| \leq {}^{\exists}\rho < 1, \; |u| \leq a_{\max}$$

と仮定する。このとき、f が等時となる周期運動を生ずるためには、

$$f(u) = lu$$

(ただし、l は $|l| < 1$ をみたす定数) が必要十分である。

補足 定理 1.3 中の仮定は $u \pm f(u)$ が復元力であることを保証する仮定

$$u \pm f(u) > 0, \; |u| \leq a_{\max}$$

より少し強い仮定である。

1.3 図形的考察

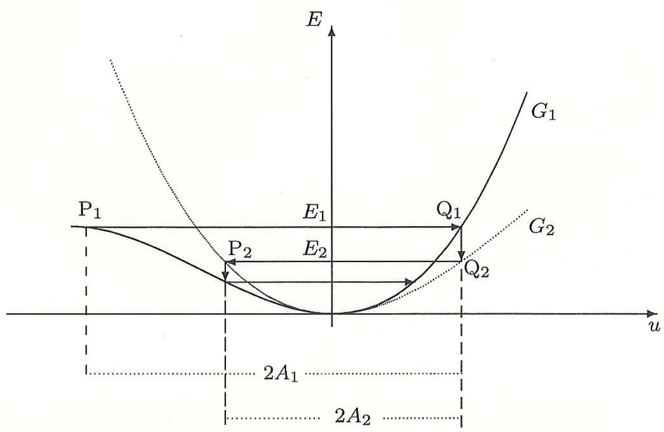

図 2:

問題の物理的意味、定理の内容と証明を理解する上で、振動の観測量に対応する量グラフ化が有用である。振動を引き起こす (g_1, g_2) の積分 (G_1, G_2) は運動において復元力等のエネ

ルギーを記述する。すなわち、対応する G_i の定める運動エネルギーと復元力等のエネルギーの和が力学的エネルギーを与える。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G_i(u) = E_i \tag{1.4}$$

ただしここで対象となる質点の質量は1とした（以下同様）。この $\mathrm{G_i}, \mathrm{E_i}$ を図示したのが図2である。このとき、$u = u(t)$ は図2の $\mathrm{P_1}$ から $\mathrm{Q_1}$ までエネルギー $\mathrm{E_1}$ を保存しつつ運動する。同様に $\mathrm{Q_2}$ から $\mathrm{P_2}$ まではエネルギー $\mathrm{E_2}$ を保存しつつ運動する。それらを t に依存させた図が図1である。これらの運動において $\mathrm{P_i}, \mathrm{Q_i}$ の u 座標を対応させる写像が σ_i である。特に、(1.1) による運動が周期運動（0 が center）になる必要十分条件は $\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}, \mathrm{Q_1}, \mathrm{Q_2}$ のなす四角形が長方形になることである。

2 論証

本節では、第1節で述べた結果の証明を行う。

2.1 定理 1.1 の証明

この項では定理 1.1 の証明を行う。証明の前にまず、(1.3) 式がどのように導出されたかを記す。

(1.3) の導出法

まず $T_1(A_1)$ を計算すると、エネルギー保存則 (1.4) より

$$\begin{aligned}
T(A_1, A_2) &= T_1(A_1) + T_2(A_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{b_1}^{a} \frac{du}{\sqrt{E_1 - G_1(u)}} - \int_{a}^{b_2} \frac{du}{\sqrt{E_2 - G_2(u)}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{b_1}^{0} + \int_{0}^{a}\right) \frac{du}{\sqrt{E_1 - G_1(u)}} + T_2(A_2)
\end{aligned}$$

となり、G_1, G_2 の逆関数を

$$G_1^{-1} = x_1^{\pm}, G_2^{-1} = x_2^{\pm}$$

として（図3参照）、さらに $G_1(u) = s$ と置換すると

$$\begin{aligned}
T(A_1, A_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{E_1}^{0} \frac{(x_1^-)'(s)}{\sqrt{E_1 - s}} ds + \int_{0}^{E_1} \frac{(x_1^+)'(s)}{\sqrt{E_1 - s}} ds\right) + T_2(A_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{E_1} \frac{(x_1^+)'(s) - (x_1^-)'(s)}{\sqrt{E_1 - s}} ds + T_2(A_2)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}$ 回積分して、(すなわち $\int_0^E \frac{dr}{\sqrt{E-r}}$ を作用して)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{E_1} \frac{T(A_1,A_2)}{\sqrt{E_1-r}}dr - \int_0^{E_1} \frac{T_2(A_2)}{\sqrt{E_1-r}}dr &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{E_1} \frac{dr}{\sqrt{E_1-r}} \int_0^r \frac{(x_1^+)'(s)-(x_1^-)'(s)}{\sqrt{r-s}}ds \\
\int_0^{E_1} \frac{T(A_1,A_2)-T_2(A_2)}{\sqrt{E_1-r}}dr &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(x_1^+(E_1) - x_1^-(E_1)\right) \\
\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{E_1} \frac{T_1(A_1)}{\sqrt{E_1-r}}dr &= \left(\frac{\mathrm{Id}-\sigma_1}{2}\right) \circ x_1^+(E_1)
\end{aligned}
$$

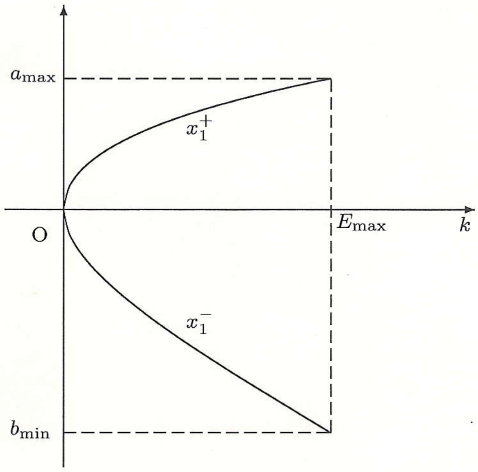

図 3:

ここで、

$$\left(\frac{\mathrm{Id}-\sigma_1}{2}\right) \circ x_1^+(E_1) = x(E_1)$$

とおくと、

$$A_1 = \left(\frac{\mathrm{Id}-\sigma_1}{2}\right)(a)$$

であり、

$$G_1(a) = E_1 \Longleftrightarrow a = G_1^{-1}(E_1) = x_1^+(E_1)$$

より、

$$A_1 = \left(\frac{\mathrm{Id}-\sigma_1}{2}\right) \circ x_1^+(E_1) = x(E_1)$$

となるから、

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{E_1} \frac{T_1(x(r))}{\sqrt{E_1-r}}dr = x(E_1)$$

すなわち、(1.3) 式が導出された。

さていよいよ定理 1.1 の証明を行う。

定理 1.1 の証明

示すべきは、定理 1.1 における Step1 から Step3 によって得られた G_1, G_2 による半周期たちが観測データ T_1, T_2 と一致することである。まず、定理 (1.1) によって得られた G_1 に対して周期を求める。エネルギー保存則より半周期を求めることができ、

$$T_{half} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_b^a \frac{du}{\sqrt{E - G(u)}}$$

である。これに G_1 を適用して

$$\tilde{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_b^a \frac{du}{\sqrt{E - G_1(u)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_b^0 \frac{du}{\sqrt{G_1(b) - G_1(u)}} + \int_0^a \frac{du}{\sqrt{G_1(a) - G_1(u)}} \right)$$

を得る。この式を $G_1(u) = s$ で置換して、

$$\begin{aligned}
\tilde{T_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{G_1(b)}^0 \frac{(x_1^-)'(s)}{\sqrt{G_1(b) - s}} ds + \int_0^{G_1(a)} \frac{(x_1^+)'(s)}{\sqrt{G_1(a) - s}} ds \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{G_1(a)} \frac{(x_1^+)'(s) - (x_1^-)'(s)}{\sqrt{G_1(a) - s}} ds \\
&= \sqrt{2} \int_0^{G_1(a)} \frac{x'(s)}{\sqrt{G_1(a) - s}} ds \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

ここで、$x(k) = (\frac{\mathrm{Id} - \sigma_1}{2})(x_1^+(k))$ であり、また (1.3) 式

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^k \frac{T(x(z))}{\sqrt{k - z}} dz = x(k)$$

を $\frac{1}{2}$ 回積分して、

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^k T(x(z)) dz &= \int_0^k \frac{x(k)}{\sqrt{k - z}} dz \\
&= -2 \int_0^k x(k) \frac{d}{dz} (\sqrt{k - z}) dz \\
&= 2 \int_0^k \sqrt{k - z} x'(z) dz
\end{aligned}$$

となる。これを微分して、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} T(x(k)) = \int_0^k \frac{x'(z)}{\sqrt{k - z}} dz \qquad (2.2)$$

である。これを、(2.1) に適用すれば、

$$\begin{aligned}
\tilde{T_1} &= T_1(x(G_1(a))) \\
&= T_1(x(E)) \\
&= T_1(\frac{x_1^+(E) - x_1^-(E)}{2}) \\
&= T_1(A)
\end{aligned}$$

同様のステップを G_2 に対してふめば $\tilde{T_2} = T_2$ が得られる。証明終

2.2 定理 1.2 の証明

2 つの結合系 g, h によって、周期 T_1, T_2 と σ_1, σ_2 が実現されたとする。それぞれに (1.3) 式を適用して以下を得る。

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^k \frac{T_1(x(s))}{\sqrt{k-s}}ds = x(k), \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^k \frac{T_1(y(s))}{\sqrt{k-s}}ds = y(k). \tag{2.4}$$

ここで、x, y は以下のとおりである、

$$\begin{cases} x(s) = \frac{x_1^+(s)-x_1^-(s)}{2}, & x_1^\pm = G_1^{-1}, \\ y(s) = \frac{y_1^+(s)-y_1^-(s)}{2}, & y_1^\pm = H_1^{-1}. \end{cases}$$

(2.3) から (2.4) を引いて

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\int_0^k \frac{T_1(x(s))-T_1(y(s))}{\sqrt{k-s}}ds\right) = x(k)-y(k)$$

である。これより、

$$\begin{aligned} |x(k)-y(k)| &\le \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^k \frac{|T_1(x(s))-T_1(y(s))|}{\sqrt{k-s}}ds \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^k \frac{L\,|x(s)-y(s)|}{\sqrt{k-s}}ds \end{aligned}$$

であり、$x(s)-y(s) = z(s)$ とおくと

$$|z(k)| \le \frac{L}{\sqrt{2}\pi}\int_0^k \frac{|z(s)|}{\sqrt{k-s}}ds$$

$\frac{1}{2}$ 回積分して、

$$\int_0^k \frac{z(s)}{\sqrt{k-s}}ds \le \frac{L}{\sqrt{2}}\int_0^k |z(s)|ds$$

この 2 つの式より、

$$|z(k)| \le \frac{L}{\sqrt{2}\pi}\int_0^k \frac{|z(s)|}{\sqrt{k-s}}ds \le \frac{L^2}{2\pi}\int_0^k |z(s)|ds$$

となる。よって $|z(s)| = \varphi(s)$ とおくと、

$$0 \le \varphi(k) \le M\int_0^k \varphi(s)ds \tag{2.5}$$

となる。(ここで $M = \frac{L^2}{2\pi}$ とおいている。)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dk}\left(e^{-Mk}\int_0^k \varphi(s)ds\right) \\ =\ &\varphi(k)e^{-Mk} - Me^{-Mk}\int_0^k \varphi(s)ds \\ =\ &e^{-Mk}\left(\varphi(k) - M\int_0^k \varphi(s)ds\right) \le 0 \end{aligned}$$

が得られる。$k=0$では0であり、導関数が負ということより

$$\therefore e^{-Mk}\int_0^k \varphi(s)ds \leq 0$$

$$\therefore \int_0^k \varphi(s)ds \leq 0 \tag{2.6}$$

(2.5)、(2.6) より、

$$\varphi \equiv 0$$

となり、

$$x \equiv y$$

が示された。これと定義から

$$\frac{x_1^+(s) - x_1^-(s)}{2} = \frac{y_1^+(s) - y_1^-(s)}{2}$$

となり、

$$\frac{x_1^+(s) - \sigma_1(x_1^+(s))}{2} = \frac{y_1^+(s) - \sigma_1(y_1^+(s))}{2}$$

であり、すなわち

$$x_1^+(s) - y_1^+(s) = \sigma_1(x_1^+(s)) - \sigma_1(y_1^+(s))$$

が得られる。ここで、σは単調減少関数であることから、

$$\begin{aligned} x_1^+(s) - y_1^+(s) \geq 0 \text{ とすると} \sigma_1(x_1^+(s)) - \sigma_1(y_1^+(s)) \leq 0 \\ x_1^+(s) - y_1^+(s) \leq 0 \text{ とすると} \sigma_1(x_1^+(s)) - \sigma_1(y_1^+(s)) \geq 0 \\ \therefore x_1^+(s) - y_1^+(s) = 0 \\ x_1^+(s) = y_1^+(s) \end{aligned}$$

同様にして、

$$x_1^-(s) = y_1^-(s)$$

である。逆関数が一致しているので

$$G_1(u) = H_1(u)$$

となる。したがって、

$$g_1(u) = h_1(u)$$

が示された。同様のことを半周期T_2に対して行えば

$$g_2(u) = h_2(u)$$

が得られるので、すなわち

$$g(u) = h(u)$$

である。証明終

2.3　定理 1.3 の証明

2.3.1　十分条件

$f(u) = lu\,(|l| < 1)$ のとき結合系は

$$\begin{cases} \ddot{u} + (1+l)u = 0, & \dot{u} \geq 0; \\ \ddot{u} + (1-l)u = 0, & \dot{u} < 0. \end{cases}$$

となるが、これはばねの方程式であり、どちらの関数も等時であり、その半周期もまた等時である。つまり、半周期が等時である関数の組み合わせであるこの系の全周期もまた等時である。

また、

$$\begin{cases} g_1(u) = (1+l)u, \\ g_2(u) = (1-l)u \end{cases}$$

として、これらの原始関数は

$$\begin{cases} G_1(u) = \frac{1}{2}(1+l)u^2 \\ G_2(u) = \frac{1}{2}(1-l)u^2 \end{cases}$$

である。ここで G_1 と G_2 は互いに定数倍の関係であるので、この系は center であることも明らかである（1.3 項参照）。したがって、$f(u) = lu\,(0 < l < 1)$ のときの組み合わせの系は等時かつ center、つまり isochronous center である。

2.3.2　必要条件を示すための命題

以下で，必要条件であることを証明する。この証明はかなり長いので、いくつかの項に分けて証明を与える。まず、証明のための基本的な命題を与える。この命題は、一般の結合系ではなく、方程式 (1.2) の特性を示すものである。

さて、周期 ω を実現する結合系の f として

$$f_0(u) = lu$$

とする。すなわち

$$\int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{\int_u^a (\xi + f_0(\xi))d\xi}} + \frac{1}{\sqrt{\int_u^a (\xi - f_0(\xi))d\xi}} \right) du = \frac{\omega}{2}$$

である。

結合系は

$$\begin{cases} \ddot{u} + (u + f(u)) = 0, & \dot{u} \geq 0, \\ \ddot{u} + (u - f(u)) = 0, & \dot{u} < 0, \end{cases}$$

である。さらに、この系の周期は

$$\sqrt{2}T(A) = \int_{b(A)}^{a(A)} \frac{du}{\sqrt{\int_u^b (\xi + f(\xi))d\xi}} + \int_{b(A)}^{a(A)} \frac{du}{\sqrt{\int_u^b (\xi - f(\xi))d\xi}}$$

である。　この系が isochronous center のとき以下の命題が成立する。

命題 2.1 $g_1(u) = u + f(u)$, $g_2(u) = u - f(u)$ の形の結合系にとって 0 が center であるためには f は奇関数であることが必要十分である。

証明 f が奇関数のとき g_1, g_2 による G_1, G_2 は偶関数となり左右対称のグラフとなり、1.3 の図形的考察から center であることがしたがう。逆に、0 がこの結合系の center であるとき、この系が保証する範囲内の $a(>0)$ に対し

$$G_1(a) = \frac{1}{2}a^2 + \int_0^a f(\xi)d\xi = E_1,$$
$$G_2(a) = \frac{1}{2}a^2 - \int_0^a f(\xi)d\xi = E_2,$$

が成立し、また、この点と対合の関係の点 $b(<0)$ に対し

$$G_1(b) = \frac{1}{2}b^2 + \int_0^b f(\xi)d\xi = E_1,$$
$$G_2(b) = \frac{1}{2}b^2 - \int_0^b f(\xi)d\xi = E_2,$$

が成立する。これらの関係式より、

$$\frac{1}{2}a^2 + \int_0^a f(\xi)d\xi = G_1(b) = \frac{1}{2}b^2 + \int_0^b f(\xi)d\xi, \tag{2.7}$$
$$\frac{1}{2}a^2 - \int_0^a f(\xi)d\xi = G_2(b) = \frac{1}{2}b^2 - \int_0^b f(\xi)d\xi, \tag{2.8}$$

を得る。この 2 つの式を足して、

$$b^2 = a^2$$

を得る。ゆえに、点 a, b の定義より

$$b = -a$$

となる。これを (2.7) 式に代入して、

$$\frac{1}{2}a^2 + \int_0^a f(\xi)d\xi = G_1(b) = \frac{1}{2}(-a)^2 + \int_0^{-a} f(\xi)d\xi$$

を得る。整理して、

$$\int_0^a f(\xi)d\xi + \int_{-a}^0 f(\xi)d\xi = 0$$

となり、これを a で微分すると、

$$f(a)+f(-a)=0$$

であり、これはすなわち奇関数の定義式

$$f(a)=-f(-a)$$

となるので、したがって f は奇関数である。 証明終

2.3.3 Volterra 積分方程式の導出

命題 2.1 より、この系の f は奇関数であることが分かった。したがって、この系の周期もまた次のように書き直すことができる。

$$\sqrt{2}T(A)=\int_{-a}^{a}\frac{du}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}}+\int_{-a}^{a}\frac{du}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}}$$

さて、等時のときはこの周期は定数だから、$\sqrt{2}\,T(A)=\omega$ とすれば、

$$\int_{-a}^{a}\frac{du}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}}+\int_{-a}^{a}\frac{du}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}}=\omega$$

である。また、$G(-u)=G(u)$ より

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{du}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}} &= \int_{-a}^{0}\frac{du}{\sqrt{G(-a)-G(u)}}+\int_{0}^{a}\frac{du}{\sqrt{G(a)-G(u)}}\\ &= \int_{0}^{a}\frac{-du}{\sqrt{G(-a)-G(-u)}}+\int_{0}^{a}\frac{du}{\sqrt{G(a)-G(u)}}\\ &= 2\int_{0}^{a}\frac{du}{\sqrt{G(a)-G(u)}}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\int_0^a\left(\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}}+\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}}\right)du=\frac{\omega}{2}$$

を得る。f_0 の定義より

$$\int_0^a\left(\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f_0(\xi))d\xi}}+\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f_0(\xi))d\xi}}\right)du=\frac{\omega}{2}$$

であるから、引き算すれば、

$$\int_0^a(\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}}-\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f_0(\xi))d\xi}}+\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}}-\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f_0(\xi))d\xi}})du=0$$

をえる。これを変形して

$$\int_0^a \frac{\int_u^a (f-f_0)(\xi)d\xi}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}\sqrt{\int_u^a(\xi+f_0(\xi))d\xi}\left(\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}+\sqrt{\int_u^a(\xi+f_0(\xi))d\xi}\right)}du$$
$$+\int_0^a \frac{\int_u^a (f-f_0)(\xi)d\xi}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}\sqrt{\int_u^a(\xi-f_0(\xi))d\xi}(\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}+\sqrt{\int_u^a(\xi-f_0(\xi))d\xi})}du=0$$

これより、積分順序の交換をしてさらに、

$$K(a,v)=$$
$$\int_0^v \left(\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}\sqrt{\int_u^a(\xi+f_0(\xi))d\xi}(\sqrt{\int_u^a(\xi+f(\xi))d\xi}+\sqrt{\int_u^a(\xi+f_0(\xi))d\xi})}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}\sqrt{\int_u^a(\xi-f_0(\xi))d\xi}(\sqrt{\int_u^a(\xi-f(\xi))d\xi}+\sqrt{\int_u^a(\xi-f_0(\xi))d\xi})}\right)du$$

とおくと、

$$\int_0^a K(a,v)(f-f_0)(v)dv=0 \tag{2.9}$$

が得られる。(2.9) から、$f-f_0\equiv 0$ を示せば、一意性が証明される。

2.3.4 Volterra 積分方程式の $\frac{1}{2}$ 回積分

ここで、

$$\sqrt{\int_u^a(\xi\pm f(\xi))d\xi}=D^{\pm}(u),\ \sqrt{\int_u^a(\xi\pm f_0(\xi))d\xi}=D_0^{\pm}(u),\ f-f_0=\varphi$$

とおくと、(2.9) 式は

$$\int_0^a\Big(\int_0^v \frac{1}{D^+(u)D_0^+(u)(D^+(u)+D_0^+(u))}+\frac{1}{D^-(u)D_0^-(u)(D^-(u)+D_0^-(u))}\Big)du\,\varphi(v)dv=0$$

となる。ここで、$u=ar$ とおき、さらに、$\xi=a\eta$ とおくと、

$$a\int_0^a\int_0^{\frac{v}{a}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\int_r^1(a\eta+f(a\eta))ad\eta}\sqrt{\int_r^1(a\eta+f_0(a\eta))ad\eta}}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\int_r^1(a\eta+f(a\eta))ad\eta}+\sqrt{\int_r^1(a\eta+f_0(a\eta))ad\eta}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\int_r^1(a\eta-f(a\eta))ad\eta}\sqrt{\int_r^1(a\eta-f_0(a\eta))ad\eta}}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\int_r^1(a\eta-f(a\eta))ad\eta}+\sqrt{\int_r^1(a\eta-f_0(a\eta))ad\eta}}dr\Big)$$
$$\times\varphi(v)dv=0.$$

a^2 をかけて

$$\int_0^a \int_0^{\frac{v}{a}} \Bigg(\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f_0(a\eta)}{a}d\eta}}$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}+\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f_0(a\eta)}{a}d\eta}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)-2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}\sqrt{(1-r^2)-2\int_r^1 \frac{f_0(a\eta)}{a}d\eta}}$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)-2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}+\sqrt{(1-r^2)-2\int_r^1 \frac{f_0(a\eta)}{a}d\eta}} \Bigg) dr\varphi(v)dv = 0$$

となる。ここで、

$$E_0^{\pm}(a,r) = \sqrt{(1-r^2)\pm 2\int_r^1 \frac{f_0(a\eta)}{a}d\eta},\ E^{\pm}(a,r) = \sqrt{(1-r^2)\pm 2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta},$$

とおくと、

$$\int_0^a \int_0^{\frac{v}{a}} \Bigg(\frac{1}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))} + \frac{1}{E^-(a,r)E_0^-(a,r)(E^-(a,r)+E_0^-(a,r))} \Bigg) dr\varphi(v)dv = 0 \quad (2.10)$$

となる。$E^{\pm}(a,r)$ の定義式は

$$E^{\pm}(a,r) = \sqrt{1-r^2}\sqrt{1\pm\frac{2}{1-r^2}\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}$$

と変形できて、

$$\lim_{r\to 1}\left(1\pm\frac{2}{1-r^2}\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta\right) = 1\pm\lim_{r\to 1}\frac{2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}{1-r^2} = 1\pm\lim_{r\to 1}\frac{-2\frac{f(ar)}{a}}{-2r} = 1\pm\frac{f(a)}{a}$$

である (このことは $E_0^{\pm}$ に対しても同様である)。よって、

$$\lim_{r\to 1}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{1\pm\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1\pm\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1\pm\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1\pm\frac{f_0(a)}{a}})}{E^{\pm}(a,r)E_0^{\pm}(a,r)(E^{\pm}(a,r)+E_0^{\pm}(a,r))} = 1$$

であるので、(2.10) を

$$\int_0^a \int_0^{\frac{v}{a}} \Bigg(\frac{1}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}$$
$$+\frac{1}{E^-(a,r)E_0^-(a,r)(E^-(a,r)+E_0^-(a,r))}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})} \Bigg) dr\varphi(v)dv = 0$$

と変形し、さらに、

$$\int_0^a\int_0^{\frac{v}{a}}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}-\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dr\,\varphi(v)dv$$
$$+\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}$$
$$\times\int_0^a\int_0^{\frac{v}{a}}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}{E^-(a,r)E_0^-(a,r)(E^-(a,r)+E_0^-(a,r))}-\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dr\,\varphi(v)dv$$
$$+\left(1+\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}\right)\int_0^a\int_0^{\frac{v}{a}}\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}dr\,\varphi(v)dv=0$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}
&h(a)\\
&=\int_0^1\int_0^t\Big(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}\Big)dr\varphi(at)dt\\
&\quad+\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}\\
&\quad\quad\times\int_0^1\int_0^t\Big(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}{E^-(a,r)E_0^-(a,r)(E^-(a,r)+E_0^-(a,r))}\Big)dr\varphi(at)dt,
\end{aligned}\tag{2.11}$$

また、

$$c(a)=1+\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}$$

とおいて、$v=at$ の置換をすると、

$$c(a)\int_0^a\int_0^{\frac{v}{a}}\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}dr\,\varphi(v)dv=ah(a)$$

となる。ゆえに、

$$c(a)\int_0^a\frac{v}{\sqrt{a^2-v^2}}\varphi(v)dv=ah(a)$$

である。

ここで、この両辺を $\frac{1}{2}$ 回積分する。すなわち、作用素 $\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}dz$ を作用させると、

$$c(a)\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}dz\int_0^z\frac{v}{\sqrt{z^2-v^2}}\varphi(v)dv=\int_0^a\frac{z^2h(z)}{\sqrt{a^2-z^2}}dz$$

となり、積分順序の交換をして、さらに、$z = as$ で置換すると、

$$\frac{\pi}{2}c(a)\int_0^a v\varphi(v)dv = \int_0^1 \frac{a^2s^2h(as)}{\sqrt{1-s^2}}ds$$

を得る。

2.3.5 合計 $\frac{1}{2}$ 回微分

前項で得られた方程式を微分する。この操作は、もとから考えれば Volterra　積分方程式を $\frac{1}{2}$ 回微分することに相当する。ただし、a で微分する際 $c(a)$ の微分もでてくるから、はじめから $c(a)$ で割った式を微分することにする。この際、$c(a)$ は挙動的には、2 であり、0 からは離れていることに注意する。この操作を行うと、

$$\pi\varphi(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{2}{c(a)}\int_0^1 \frac{a^2s^2h(as)}{\sqrt{1-s^2}}\right)$$

が得られる。右辺においては、$c(a)$ の導関数も出てくるが、f に C^2 級を仮定していることおよび、$c(a)$ が 0 から離れていることから、以後の議論は $c(a) = 2$ とみて行って支障がない。このとき、得られた式を a で割って、

$$\pi c(a)\varphi(a) = \int_0^1 \frac{2s^2h(as) + as^3h'(as)}{\sqrt{1-s^2}}ds \tag{2.12}$$

に到達する。

2.3.6 補題

この項では、$h(a)$ の評価を行うための $E^{\pm}(a,r)$ の挙動に関する次の補題を証明する。

補題 2.1 $a > 0,\ 0 < r < 1$ に対し、

(a)
$$\left|\frac{\sqrt{1 \pm \frac{f(a)}{a}}}{E^{\pm}(a,r)} - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right| \lesssim a\sqrt{1-r^2}$$

(b)
$$\left|\frac{\sqrt{1 \pm \frac{f(a)}{a}}}{E^{\pm}(a,r)}\frac{\sqrt{1 \pm \frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{\pm}(a,r)}\frac{\sqrt{1 \pm \frac{f(a)}{a}} + \sqrt{1 \pm \frac{f_0(a)}{a}}}{E^{\pm}(a,r) + E_0^{\pm}(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \lesssim \frac{a}{\sqrt{1-r^2}}$$

(c)
$$E^{\pm}(a,r)^2 \geq (1+\rho)(1-r^2)$$

ただし $1 + \rho > 0$ である。

(a) の証明

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E(a,r)} &= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}} \\
&= \frac{\sqrt{(1-r^2)+2+\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta} - \sqrt{1+\frac{f(a\eta)}{a}}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}} \\
&= \frac{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta - (1+\frac{f(a)}{a})(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta}(\sqrt{1-r^2}+\sqrt{(1-r^2)+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta})} \\
&= \frac{2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta - \frac{f(a)}{a}(1-r^2)}{O((1-r^2)^{\frac{3}{2}})} \\
&= \frac{2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a}d\eta - \int_r^1 \frac{f(a)}{a}2\eta d\eta}{O((1-r^2)^{\frac{3}{2}})}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
|\text{分子}| &= \left|2\int_r^1 \left(\frac{f(a\eta)}{a\eta} - \frac{f(a)}{a}\right)\eta d\eta\right| \\
&= \left|2\int_r^1 \left(\int_{a\eta}^a (\frac{f(\xi)}{\xi})' d\xi\right)\eta d\eta\right| \\
&= 2\int_r^1 (\int_{a\eta}^a \left|\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}\right| d\xi)\eta d\eta = 2\int_r^1 \int_{a\eta}^a \frac{1}{\xi^2}\left|\int_0^\xi \frac{d}{d\zeta}(\zeta f'(\zeta)-f(\zeta))d\zeta\right| d\xi \quad \eta d\eta \\
&\le 2\int_r^1 \eta \int_{a\eta}^a \frac{1}{\xi^2}\int_0^\xi |\zeta f''(\zeta)|\, d\zeta d\xi d\eta \\
&\lesssim \int_r^1 \eta \int_{a\eta}^a \frac{1}{\xi^2}\int_0^\xi \zeta d\zeta d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2}\int_r^1 a(1-\eta)\eta d\eta \\
&\le \frac{a}{2}\int_r^1 (1-\eta)d\eta = \frac{a}{2}(1-r)^2 \le \frac{a}{2}(1-r^2)^2
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \left|\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E(a,r)}\right| \lesssim a(1-r^2)^{\frac{1}{2}}.
$$

(b) の証明

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E(a,r)+E_0(a,r)} \\
&= (\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + O(a(1-r^2)^{\frac{1}{2}}))^3 \\
&= \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\frac{1}{1-r^2}O(a(1-r^2)^{\frac{1}{2}}) + 3\frac{O(a^2(1-r^2))}{\sqrt{1-r^2}} + O(a^3(1-r^2)^{\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{a}{\sqrt{1-r^2}})
\end{aligned}
$$

$$\therefore \left| \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E(a,r)+E_0(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \lesssim \frac{a}{\sqrt{1-r^2}}.$$

(c) の証明

まず

$$a+f(a)>0$$

より、

$$\frac{f(a)}{a} \geq \rho > -1$$

となるような定数 ρ を定義する。そして、

$$\begin{aligned} E(a,r)^2 &= 1-r^2+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a} d\eta \\ &= 1-r^2+2\int_r^1 \frac{f(a\eta)}{a\eta} \eta d\eta \\ &\geq 1-r^2+2\rho\int_r^1 \eta d\eta = (1-r^2)(1+\rho) \end{aligned}$$

となる。証明終

2.3.7 $h(a), h'(a)$ の評価

この項では $h(a), h'(a)$ の評価に関する次の補題を証明する。

補題 2.2 (2.11) で定義した $h(a)$ に対して：

$$\text{(a)} \quad |h(a)| < a\,c(a)\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}|\varphi(at)|dt$$

$$\text{(b)} \quad |ah'(a)| \lesssim a\max_{0\leq u\leq a}|\varphi(u)|$$

(a) の証明

補題 2.1 より

$$\begin{aligned} &|h(a)| \\ &= \left| \int_0^1 \int_0^t \Big(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))} \Big) dr\varphi(at)dt \right. \\ &\quad + \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})} \\ &\quad \left. \times \int_0^1 \int_0^t \Big(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}{E^-(a,r)E_0^-(a,r)(E^-(a,r)+E_0^-(a,r))} \Big) dr\varphi(at)dt \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int_0^1 \int_0^t \frac{a}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} dr\, |\varphi(at)| dt \\
&\qquad + \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})} \int_0^1 \int_0^t \frac{a}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} dr\, |\varphi(at)| dt \\
&= a\left(1+\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}\right) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} |\varphi(at)| dt \\
&= a\, c(a) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} |\varphi(at)| dt
\end{aligned}
$$

を得る。

(b) の証明

まず、

$$
\begin{aligned}
&ah'(a) \\
&= -\int_0^1 \int_0^t a\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)}\right) dr\, \varphi(at) dt \\
&+ \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)}\right) dr\, at\varphi'(at) dt \\
&- \int_0^1 \int_0^t a\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)}\right) dr\, \varphi(at) dt \\
&+ \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)}\right) dr\, at\varphi'(at) dt
\end{aligned}
$$

である。そこで、次の式を考えると、

$$
\begin{aligned}
&\left| a\frac{\partial}{\partial a}\frac{\sqrt{1\pm\frac{f(a)}{a}}}{E^\pm(a,r)} \right| \\
&= \left| \frac{(\frac{f(a)}{a})'}{2\sqrt{1\pm\frac{f(a)}{a}}} \frac{a}{E^\pm(a,r)} - \sqrt{1\pm\frac{f(a)}{a}} \frac{2a\int_r^1 \left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{f(a\eta)}{a\eta}\eta d\eta\right)}{E^\pm(a,r)^2 2\sqrt{(1-r^2)\pm 2\int_r^1 \frac{a\eta}{a} d\eta}} \right| \\
&\lesssim \frac{a}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{a\int_r^1 \eta^2 d\eta}{(1-r^2)\sqrt{1-r^2}} \\
&\lesssim \frac{a}{\sqrt{1-r^2}}
\end{aligned}
$$

となり、さらに、

$$
\left| a\frac{\partial}{\partial a}\frac{\sqrt{1\pm\frac{f(a)}{a}}}{E^{\pm}(a,r)}\frac{\sqrt{1\pm\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{\pm}(a,r)}\frac{\sqrt{1\pm\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1\pm\frac{f_0(a)}{a}}}{E^{\pm}(a,r)+E_0^{\pm}(a,r)} \right|
\lesssim \frac{a}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}
$$

が示される。これより、$ah'(a)$ の第1項、第3項を考える。この2つの項を取り出して

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1\int_0^t a\frac{\partial}{\partial a}\Bigg(&\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^{+}(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{+}(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^{+}(a,r)+E_0^{+}(a,r)}\\
&+\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^{-}(a,r)}\frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{-}(a,r)}\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^{-}(a,r)+E_0^{-}(a,r)}\Bigg)dr\,\varphi(at)dt
\end{aligned}
$$

であることから、

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|-\int_0^1\int_0^t a\frac{\partial}{\partial a}\Bigg(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^{+}(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{+}(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^{+}(a,r)+E_0^{+}(a,r)}\\
&\qquad+\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^{-}(a,r)}\frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{-}(a,r)}\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^{-}(a,r)+E_0^{-}(a,r)}\Bigg)dr\,\varphi(at)dt\Bigg|\\
&\lesssim a\int_0^1\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}|\varphi(at)|dt\\
&\lesssim a\sup_{0\le\xi\le a}|\varphi(\xi)| \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

が示される．次に残りの部分 (第2項、第4項) の評価を行う。2つの項を取り出せば、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^t\left(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^{+}(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{+}(a,r)}\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^{+}(a,r)+E_0^{+}(a,r)}\right)dr\,at\varphi'(at)dt\\
&+\int_0^1\int_0^t\left(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^{-}(a,r)}\frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^{-}(a,r)}\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^{-}(a,r)+E_0^{-}(a,r)}\right)dr\,at\varphi'(at)dt
\end{aligned}
$$

であることから、部分積分をして

$$
-\left[\int_0^t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr\, t\varphi(at) \right]_0^1
$$

$$
+\int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr\, \varphi(at) dt
$$

$$
+\int_0^1 t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(at)\, dt
$$

$$
-\left[\int_0^t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr\, t\varphi(at) \right]_0^1
$$

$$
+\int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr\, \varphi(at) dt
$$

$$
+\int_0^1 t \left(\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(at)\, dt
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right.\\
&\qquad \left. + \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr\, \varphi(a)\\
&+\int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr\, \varphi(at) dt\\
&\qquad +\int_0^1 \int_0^t \left(\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr\, \varphi(at) dt\\
&+\int_0^1 t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}}{E^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^+(a,r)} \frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}}{E^+(a,r)+E_0^+(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(at)\, dt\\
&\qquad +\int_0^1 t \left(\frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}}{E^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E_0^-(a,r)} \frac{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}}{E^-(a,r)+E_0^-(a,r)} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(at)\, dt\\
&\lesssim \int_0^1 \frac{2a}{\sqrt{1-r^2}} dr\, |\varphi(a)| + \int_0^1 \int_0^t \frac{2a}{\sqrt{1-r^2}} dr\, |\varphi(at)| dt + \int_0^1 t \frac{2a}{\sqrt{1-t^2}} |\varphi(at)| dt\\
&\lesssim a \max\nolimits_{0\le u\le a} |\varphi(u)| \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

が示される。(2.13)、(2.14) 式より

$$
|ah'(a)| \lesssim a \max\nolimits_{0\le u\le a} |\varphi(u)|
$$

が得られる。証明終

2.3.8 $a=$**0** の近傍における $\varphi=0$ の証明

本項では $a=0$ の近傍において $\varphi=0$ であることを証明する．補題 2.2 の (a) より、(2.12) 式の一部が評価でき、

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{2s^2h(as)}{\sqrt{1-s^2}}ds\right| \\
&\lesssim \int_0^1 \frac{2s^2}{\sqrt{1-s^2}}as\left(\left(1+\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\left.\times\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}|\varphi(ast)|dt\right)ds \\
&\qquad\le a\left(1+\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1-\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1-\frac{f_0(a)}{a}})}\right) \\
&\qquad\qquad\times\int_0^1 \frac{2s^3}{\sqrt{1-s^2}}ds\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt\max|\varphi(ast)| \\
&\qquad\lesssim a\max|\varphi(ast)| \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

であり、さらにもう一部分を補題 2.2 の (b) を用いて評価すると、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{as^3h'(as)}{\sqrt{1-s^2}}ds \\
&=\left|\int_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}ash'(as)ds\right| \\
&\lesssim a\max_{0\le u\le a}|\varphi(u)|\int_0^1\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}ds \\
&\lesssim a\max|\varphi(u)| \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

が示された。(2.15),(2.16) より (2.12) は

$$
|\pi c(a)\varphi(a)|=\int_0^1\frac{2s^2h(as)+as^3h'(as)}{\sqrt{1-s^2}}ds\lesssim a\max|\varphi(u)|
$$

となるので、

$$
|\varphi(v)|\lesssim v\max|\varphi(u)|
$$

が示される。したがって、

$$
\max|\varphi(v)|\le Ma\max|\varphi(u)|
$$

となり、また、

$$
(1-Ma)\max|\varphi(u)|\le 0
$$

であるから、$a<\frac{1}{M}$ とすると、

$$
\max|\varphi(u)|=0
$$

が示される。それゆえ、

$$\varphi(u) = 0 \quad for \quad a \in [0, \frac{1}{M})$$

が成立する。したがって、

$$\varphi = f - f_0 = 0$$

が示される。すなわち、$\frac{1}{M} = a_0$ とおくと

$$f = f_0 \quad \text{for} \quad a \in [0, a_0) \tag{2.17}$$

以上により 0 の近傍において $f = f_0$ であることが証明された。

2.3.9 必要条件であることの証明の完成

この項ではすべての区間において $f = f_0$ であることを示す。

前項で、$f = f_0$ for $a \in [0, a_0)$ であることが示されたから、(2.9) 式は、

$$\int_{a_0}^{a} K(a, v)(f - f_0)(v)dv = 0 \tag{2.18}$$

となる。ここで、

$$L(a, v) = \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{v} K(a, v)$$

とおくと、

$$K(a, v) = \frac{v}{\sqrt{a^2 - v^2}} L(a, v)$$

となるから、(2.18) 式は、

$$\int_{a_0}^{a} \frac{vL(a, v)}{\sqrt{a^2 - v^2}} \varphi(v)dv = 0$$

と書き直される。ここで $\frac{1}{2}$ 回積分すると、

$$\int_{a_0}^{a} \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} \left(\int_{a_0}^{z} \frac{vL(a, v)}{\sqrt{z^2 - v^2}} \varphi(v)dv \right) dz = 0$$

となる。積分順序の交換をして、

$$\int_{a_0}^{a} v \left(\int_{v}^{a} \frac{zL(a, v)}{\sqrt{a^2 - z^2}\sqrt{z^2 - v^2}} dz \right) \varphi(v)dv = 0$$

を得る。ここで、一般化された Abel 積分方程式の解法 [11] にしたがって、

$$M(a, v) = 2v \int_{v}^{a} \frac{zL(a, v)}{\sqrt{a^2 - z^2}\sqrt{z^2 - v^2}}$$

とおくと、

$$\int_{a_0}^{a} M(a, v)\varphi(v)dv = 0 \tag{2.19}$$

を得る。ここで、$z^2 = v^2 + t(a^2 - v^2)$ と置換すると

$$M(a, v) = v \int_{0}^{1} \frac{L(\sqrt{v^2 + t(a^2 - v^2)}, v)}{\sqrt{a^2 - v^2}\sqrt{1 - t}\sqrt{t}\sqrt{a^2 - v^2}} (a^2 - v^2)dt \tag{2.20}$$

が得られる。(2.19) を a で微分すると、

$$M(a,a)\varphi(a)+\int_{a_0}^{a}\frac{\partial M}{\partial a}(a,v)\varphi(v)dv=0 \tag{2.21}$$

となる。ここで、

$$M(a,a)=a\int_0^1\frac{L(a,a)}{\sqrt{1-t}\sqrt{t}}dt=\pi aL(a,a)$$

となり、$K(a,v)$ の定義式を、

$$K(a,v)=K_+(a,v)+K_-(a,v)$$

と書き直して、K_+ だけ取り出すと、

$$\begin{aligned}&K_+(a,v)\\&=\int_0^v\frac{du}{\sqrt{\int_u^a\xi+f(\xi)d\xi}\sqrt{\int_u^a\xi+f_0(\xi)d\xi}(\sqrt{\int_u^a\xi+f(\xi)d\xi}+\sqrt{\int_u^a\xi+f_0(\xi)d\xi})}\end{aligned}$$

であるから、$u=ar$ と置換すると、

$$K_+(a,v)=\int_0^{\frac{v}{a}}\frac{a}{\sqrt{\int_{ar}^a\xi+f(\xi)d\xi}\sqrt{\int_{ar}^a\xi+f_0(\xi)d\xi}(\sqrt{\int_{ar}^a\xi+f(\xi)d\xi}+\sqrt{\int_{ar}^a\xi+f_0(\xi)d\xi})}dr$$

となり、さらに、$\xi=a\eta$ と置換すると、

$$\begin{aligned}&K_+(a,v)\\&=\int_0^{\frac{v}{a}}\frac{a}{\sqrt{\int_r^1a(a\eta+f(a\eta))d\eta}\sqrt{\int_r^1a(a\eta+f_0(a\eta))d\eta}}\\&\qquad\times\frac{1}{\sqrt{\int_r^1a(a\eta+f(a\eta))d\eta}+\sqrt{\int_r^1a(a\eta+f_0(a\eta))d\eta}}dr\\&=\frac{2\sqrt{2}}{a^2}\int_0^{\frac{v}{a}}\frac{dr}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$L_+(a,v)=\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}K_+(a,v)$$

として、$v=at$ とおくと、

$$\begin{aligned}L_+(a,at)&=\frac{\sqrt{a^2-a^2t^2}}{at}K_+(a,at)\\&=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\frac{2\sqrt{2}}{a^2}\int_0^t\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}dr\\&\qquad\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\frac{2\sqrt{2}}{a^2}\left(\int_0^t \frac{dr}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right.\\
&\qquad \left. + \int_0^t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dr \right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\frac{2\sqrt{2}}{a^2}\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right.\\
&\qquad \left. + \int_0^t \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dr \right)
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

となり、補題 2.1 を適用し、さらに、$t \to 1$ とすると、

$$
L_+(a,a) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})} \frac{2\sqrt{2}}{a^2}
$$

であるから、

$$
M(a,a) = \pi a L_+(a,a) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{a} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})} \tag{2.23}
$$

に到達するが、これより、$M(a,a)$ は 0 でない定数であることが示された。

ここで、(2.20) 式を微分するために、(2.22) 式において $at = v$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
&L_+(a,v)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})} \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}\frac{2\sqrt{2}}{a^2}\left(\frac{v}{\sqrt{a^2-v^2}}\right.\\
&\qquad \left. + \int_0^{\frac{v}{a}} \left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))} - \frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dr \right)
\end{aligned}
$$

となるので、これを微分すれば、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L_+(a,v)}{\partial a}\\
&=2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}\right)\\
&+\frac{a}{v\sqrt{a^2-v^2}}\int_0^{\frac{v}{a}}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}-\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dr\\
&\qquad\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}\\
&+\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}-\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_{r=\frac{v}{a}}\\
&\qquad\times\left(\frac{v}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}\\
&+\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}\int_0^{\frac{v}{a}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}{E^+(a,r)E_0^+(a,r)(E^+(a,r)+E_0^+(a,r))}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}}(\sqrt{1+\frac{f(a)}{a}}+\sqrt{1+\frac{f_0(a)}{a}})}\right)dr
\end{aligned}
$$

を得る。これらの各項に対して補題 2.1 を適用すれば、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L_+(a,v)}{\partial a}\\
&=O(1)+\frac{a}{v\sqrt{a^2-v^2}}\int_0^{\frac{v}{a}}O\left(\frac{a}{\sqrt{1-r^2}}\right)dr\\
&\qquad+\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}O\left(\frac{a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}\right)\left(-\frac{v}{a^2}\right)+\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}\int_0^{\frac{v}{a}}O\left(\frac{1}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dr\\
&=O(1)+\frac{a}{v\sqrt{a^2-v^2}}O\left(a\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\frac{v}{a}\right)+O(1)+\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}\frac{\frac{v}{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}
\end{aligned}
$$

となるので、すなわち、

$$\frac{\partial L_+(a,v)}{\partial a}=O(1) \tag{2.24}$$

が成立する。同様に K_- に対して行うことにより、

$$\frac{\partial L_-(a,v)}{\partial a}=O(1)$$

を得ることができ、すなわち、

$$\frac{\partial L(a,v)}{\partial a}=O(1) \tag{2.25}$$

が成立する。

次にこれを用いて、(2.20) 式の偏導関数を評価する。(2.20) 式より、

$$\frac{\partial M}{\partial a} = v\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial a}(\sqrt{v^2+t(a^2-v^2)}, v)\frac{at}{\sqrt{v^2+t(a^2-v^2)}}\frac{dt}{\sqrt{1-t}\sqrt{t}}$$

は、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial M}{\partial a}(a,v)\right| \\
&\lesssim v\int_0^1 \frac{at}{\sqrt{v^2+t(a^2-v^2)}\sqrt{1-t}\sqrt{t}}dt \\
&\leq a\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt \\
&= \frac{\pi}{2}a
\end{aligned} \tag{2.26}$$

となる。ここで、(2.21),(2.23),(2.26) 式より

$$M(a,a)\varphi(a) + \int_{a_0}^a \frac{\partial M}{\partial a}(a,v)\varphi(v)dv = 0$$

は、

$$\varphi(a) = -\frac{1}{M(a,a)}\int_{a_0}^a \frac{\partial M}{\partial a}(a,v)\varphi(v)dv$$

となり、

$$|\varphi(a)| \leq \frac{1}{M(a,a)}\int_{a_0}^a \frac{\pi}{2}a\,|\varphi(v)dv|$$

であるから、

$$|\varphi(a)| \lesssim \int_{a_0}^a |\varphi(v)|\,dv$$

となる。もし、ここで、$\varphi \neq 0$ とすると、

$$\frac{\varphi(a)}{\int_{a_0}^a |\varphi(v)|\,dv} \leq \text{Const.}$$

であるから、この両辺を $[a_0, b]$ で積分すると、

$$\int_{a_0+\epsilon}^b \frac{\varphi(a)}{\int_{a_0}^a |\varphi(v)|\,dv}da \leq \text{Const.}(b-a_0-\epsilon)$$

となり、ここで、

$$\int_{a_0}^b \frac{f'(a)}{f(a)}da = [\log f(a)]_{a_0}^b$$

であることを用いて、

$$\int_{a_0+\epsilon}^b \frac{d}{da}(\log\int_{a_0}^a |\varphi(v)|dv)da \leq \text{Const.}(b-a-\epsilon)$$

となり、

$$\log\int_{a_0}^b |\varphi(v)|dv - \log\int_{a_0}^{a_0+\epsilon} |\varphi(v)|dv \leq \text{Const.}(b-a-\epsilon)$$

となる。ここで、$\epsilon \to 0$ とすると、左辺 $\to \infty$ となり、矛盾する。したがって、仮定が誤りとなるので、すなわち

$$\varphi = 0$$

となり、したがって、

$$f = f_0 \quad \text{for} \quad a \in [a_0, a_{\max}] \tag{2.27}$$

が成立する。

以上により、(2.17),(2.27) 式より、

$$f = f_0 \quad \text{for} \quad a \in [0, a_{max}]$$

が成立し、一意性が証明された。証明終

3 例

本節ではいくつかの例を示す。

3.1 例 1

以下の式で支配される運動を考える。

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + lu^2 = 0, & \dot{u} > 0, \\ \ddot{u} + u - lu^2 = 0, & \dot{u} < 0. \end{cases}$$

この系は速度が 0 になる点で運動方程式が切り替わる。挙動を見るために初期値を

$$t = 0 \text{ のとき } u = b_1$$

と定めておく。この系は center ではないため、方程式が切り替わる点について注意する必要がある。ここでは $u = a$ で初めて方程式が切り替わるとする。まず $\dot{u} > 0$ の支配する方程式において、エネルギー保存則 (1.4) 式より

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}lu^3 = E_1$$

をえて、さらに、

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{b_1^2 - u^2}{2} + \frac{l}{3}(b_1^3 - u^3)}}$$

であることから、

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{b_1}^{u} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{b_1^2 - \xi^2}{2} + \frac{l}{3}(b_1^3 - \xi^3)}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2l}} \int_{b_1}^{u} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - b_1)(a - \xi)(\xi + \frac{ab_1}{a + b_1})}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2l}} \int_{b_1}^{u} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - b_1)(a-\xi)(\xi - c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2l}} \frac{2}{\sqrt{a-c}} F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{a-c}{a-b_1}\frac{u-b_1}{u-c}}, \sqrt{\frac{a-b_1}{a-c}}\right) \tag{3.1}$$

ここで $c = -\frac{ab_1}{a+b_1}, a > 0 > b > c$ であり、F は第一種不完全楕円積分である。(3.1) 式については [6, P.149] 参照。

さらに、a, b_1 は $\dot{u} = 0$ となる点であるので、b_1 は

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{l}{3}a^3 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{l}{3}u^3$$

の根であることから、a, b_1 の関係式が導かれ、

$$b_1 = \frac{-(a + \frac{3}{2l}) + \sqrt{(a+\frac{3}{2l})(-3a + \frac{3}{2l})}}{2}$$

である。さて、上記の t を u で表した式の逆関数をとり、u を t で表した式を求める。このため Jacobi の楕円関数の定義式 ([9, P.28] 参照)

$$z = F(\varphi, k) \Longleftrightarrow \sin\varphi = \mathrm{sn}(z, k)$$

を用いる。この変換を利用し

$$\sqrt{\frac{2l}{3}} \frac{\sqrt{a-c}}{2} t = F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{a-c}{a-b_1}\frac{u-b_1}{u-c}}, \sqrt{\frac{a-b_1}{a-c}}\right)$$

より

$$\sqrt{\frac{a-c}{a-b_1}\frac{u-b_1}{u-c}} = \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{\sqrt{a-c}}{2}t, k\right)$$

であるから、

$$\frac{u-b_1}{u-c} = \frac{a-b_1}{a-c}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{\sqrt{a-c}}{2}t, k\right)$$

となり、

$$\therefore u = \frac{b_1 - c\frac{a-b}{a-c}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{\sqrt{a-c}}{2}t, k\right)}{1 - \frac{a-b}{a-c}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{\sqrt{a-c}}{2}t, k\right)}$$

を得る。したがって、

$$\therefore u = u_1(t) = \frac{b_1 + \frac{b_1(a-b_1)}{a+2b_1}\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+(a+2b_1)}{a+b_1}}\sqrt{\frac{2l}{3}}t, \sqrt{\frac{(a+b_1)(a-b_1)}{a(a+2b_1)}}\right)}{1 - \frac{(a+b_1)(a-b_1)}{a(a+2b_1)}\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+(a+2b_1)}{a+b_1}}\sqrt{\frac{2l}{3}}t, \sqrt{\frac{(a+b_1)(a-b_1)}{a(a+2b_1)}}\right)} \tag{3.2}$$

である。次に、$\dot{u} > 0$ の支配する周期を求める。この半周期は (3.1) 式

$$t = \sqrt{\frac{3}{2l}}\frac{2}{\sqrt{a-c}}F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{a-c}{a-b_1}\frac{u-b_1}{u-c}}, \sqrt{\frac{a-b_1}{a-c}}\right)$$

より、対応する変位の範囲、つまり、$b_1 \le u \le a$ における周期を計算する。$u = a$ により、

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{3}{2l}}\frac{2}{\sqrt{a-c}}F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{a-c}{a-b_1}\frac{a-b_1}{a-c}},\sqrt{\frac{a-b_1}{a-c}}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{a+b_1}{a(a+2b_1)}}\sqrt{\frac{3}{2l}}F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{a-b_1}{a-c}}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{3}{2l}}\sqrt{\frac{a+b_1}{a(a+2b_1)}}K\left(\sqrt{\frac{(a+b_1)(a-b_1)}{a(a+2b_1)}}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

であり、ここで K は完全楕円積分 ([6, P.227] 参照) である。以上の手順により、$\dot{u} > 0$ により支配される、b_1、時間による変位関数 $u_1(t)$、そして周期 T_1 が a によって与えられた。

同様にして $\dot{u} < 0$ の支配する方程式を考える。エネルギー保存則の式により同様にして

$$\frac{dt}{du} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{2}-\frac{l}{3}(a^3-u^3)}}$$

となるので、これより

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_a^u \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{a^2-\xi^2}{2}-\frac{l}{3}(a^3-\xi^3)}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2l}}\int_u^a \frac{d\xi}{\sqrt{(u-a)(u-b_2)(u-c)}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2l}}\frac{2}{\sqrt{c-b_2}}F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{c-b_2}{a-b_2}\frac{a-u}{c-u}},\sqrt{\frac{a-b_2}{c-b_2}}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$(\text{ここで、}c = -\frac{ab_2}{a+b_2}, c > a > 0 > b_2).$$

さらに b_1 と同様に a, b_2 の関係式が

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{l}{3}a^3 = \frac{1}{2}u^2 - \frac{l}{3}u^3$$

より、根として求めることができ、

$$b_2 = \frac{-(a-\frac{3}{2l}) - \sqrt{(a-\frac{3}{2l})(-3a-\frac{3}{2l})}}{2}$$

となる。

次に、u を t の式で表す。(3.4) 式

$$t = \sqrt{\frac{3}{2l}}\frac{2}{\sqrt{c-b_2}}F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{c-b_2}{a-b_2}\frac{a-u}{c-u}},\sqrt{\frac{a-b_2}{c-b_2}}\right)$$

より、

$$\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{c-b_2}{2}t = F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{c-b_2}{a-b_2}\frac{a-u}{c-u}},\sqrt{\frac{a-b_2}{c-b_2}}\right)$$

となり、

$$\sqrt{\frac{c-b_2}{a-b_2}\frac{a-u}{c-u}} = \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{\sqrt{c-b_2}}{2}t, \sqrt{\frac{a-b_2}{c-b_2}}\right)$$

を得るので、

$$u = \frac{a - c\frac{a-b_2}{c-b_2}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{\sqrt{c-b_2}}{2}t, \sqrt{\frac{a-b_2}{c-b_2}}\right)}{1 - \frac{a-b_2}{c-b_2}\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2l}{3}}\frac{\sqrt{c-b_2}}{2}t, \sqrt{\frac{a-b_2}{c-b_2}}\right)}$$

となる。したがって、

$$u_2(t) = \frac{a - \frac{a(a-b_2)}{2a+b_2}\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b_2(2a+b_2)}{a+b_2}}\sqrt{\frac{2l}{3}}(t-T_1), \sqrt{-\frac{(a+b_2)(a-b_2)}{b_2(2a+b_2)}}\right)}{1 + \frac{(a+b_2)(a-b_2)}{b_2(2a+b_2)}\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-b_2(2a+b_2)}{a+b_2}}\sqrt{\frac{2l}{3}}(t-T_1), \sqrt{-\frac{(a+b_2)(a-b_2)}{b_2(2a+b_2)}}\right)} \tag{3.5}$$

を得る。次に、半周期を求める。同様にして

$$\begin{aligned} T_2 &= \sqrt{\frac{3}{2l}}\frac{2}{\sqrt{c-b_2}}F\left(\mathrm{ArcSin}\sqrt{\frac{c-b_2}{a-b_2}\frac{a-b_2}{c-b_2}}, \sqrt{\frac{a-b_2}{c-b_2}}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{3}{2l}}\sqrt{\frac{-(a+b_2)}{b_2(2a+b_2)}}K\left(\sqrt{-\frac{(a+b_2)(a-b_2)}{b_2(2a+b_2)}}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

以上により、a を変数として u_1, u_2, T_1, T_2 を得ることができた。しかし、a によって記述される範囲においては 1 周期分の記述しかできない。なぜなら 2 周期目に突入したときのことを考えるとそれぞれの対応は以下のとおりに変更されるはずである。

$$a \to a_2,\ b_1 \to b_2,\ b_2 \to b_3.$$

このようにそれぞれを変更させることにより 2 周期目を導くことができるはずであるが、ここでは新しく a_2 と b_3 が導入されている。さらに周期を増やしていくためには、一般化しておく必要がある。

この系は速度の正負によって運動方程式が切り替わり、また、速度が正の状態からスタートすると仮定している。つまり速度は「正→負→正→負→ . . . 」というように変化している (逆の場合-負からスタート-は時間を平行移動すればよい)。従って、半周期単位で奇数回目は速度が「正」、偶数回目は「負」、とそれぞれ支配されているので、まずは切り替わる各点を見ていく。ここで対合を導入しておく。支配する方程式が 2 つなので、対合も 2 つ。すなわち

$$\begin{cases} b_1 = \sigma_1(a) & (\Leftrightarrow \sigma_1(b_1) = a), \\ b_2 = \sigma_2(a) & (\Leftrightarrow \sigma_2(b_2) = a). \end{cases}$$

同様に次の組は

$$\begin{cases} \sigma_1(a_2) = b_2, \\ \sigma_2(a_2) = b_3. \end{cases}$$

さらに、σ の定義より、

$$
\begin{cases}
\sigma_1(a_2) = b_2 = \sigma_2(a) \Leftrightarrow a_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2(a), \\
\sigma_2(a_2) = b_3,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\sigma_1(a_3) = b_3 = \sigma_2(a_2) \Leftrightarrow a_3 = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2)(a), \\
\sigma_2(a_3) = b_4,
\end{cases}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{cases}
\sigma_1(a_i) = b_i, \\
\sigma_2(a_i) = b_{i+1},
\end{cases}
$$

$$\therefore a_i = \underbrace{(\sigma_1 \circ \sigma_2) \dots (\sigma_1 \circ \sigma_2)}_{i-1\,\text{個}} \quad (a).$$

これで運動方程式の切り替わるすべての点が a で表せるようになった。ここで

$$a = a_1$$

とすることにより

$$
\begin{cases}
b_i = \sigma_1(a_i) \\
b_{i+1} = \sigma_2(a_i) \\
a_i = \underbrace{(\sigma_1 \circ \sigma_2) \dots (\sigma_1 \circ \sigma_2)}_{i-1\,\text{個}} \quad (a) \quad (i = 1, 2, 3, \dots)
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

を得る。さらに、(3.2)(3.3)(3.5)(3.6) に代入することで一般化された半周期単位で i 週目の運動方程式と時間が得られる。

$$
\begin{cases}
u_{2i-1}(t) = \dfrac{\sigma_1(a_i) + \frac{\sigma_1(a_i)(a_i - \sigma_1(a_i))}{a_i + 2\sigma_1(a_i)} \mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_i(a_i+2\sigma(a_i))}{a_i+\sigma(a_i)}}\sqrt{\frac{2l}{3}}\left(t - \sum_{j=1}^{2i-2} T_j\right), \sqrt{\frac{(a_i+\sigma_1(a_i))(a_i-\sigma_1(a_i))}{a_i(a_i+2\sigma_1(a_i))}}\right)}{1 - \frac{(a_i+\sigma_1(a_i))(a_i-\sigma_1(a_i))}{a_i(a_i+2\sigma_1(a_i))} \mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_i(a_i+2\sigma(a_i))}{a_i+\sigma(a_i)}}\sqrt{\frac{2l}{3}}\left(t - \sum_{j=1}^{2i-2} T_j\right), \sqrt{\frac{(a_i+\sigma_1(a_i))(a_i-\sigma_1(a_i))}{a_i(a_i+2\sigma_1(a_i))}}\right)}, \\
u_{2i}(t) = \dfrac{a_i - \frac{a_i(a_i-\sigma_2(a_i))}{2a_i+\sigma_2(a_i)} \mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\sigma_2(a_i)(2a_i+\sigma_2(a_i))}{a_i+\sigma_2(a_i)}}\sqrt{\frac{2l}{3}}\left(t - \sum_{j=1}^{2i-1} T_j\right), \sqrt{\frac{-(a_i+2\sigma_2(a_i))(a_i-\sigma_2(a_i))}{\sigma_2(a_i)(2a_i+\sigma_2(a_i))}}\right)}{1 - \frac{(a_i+\sigma_2(a_i))(a_i-\sigma_2(a_i))}{\sigma_2(a_i)(2a_i+\sigma_2(a_i))} \mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\sigma_2(a_i)(2a_i+\sigma_2(a_i))}{a_i+\sigma_2(a_i)}}\sqrt{\frac{2l}{3}}\left(t - \sum_{j=1}^{2i-1} T_j\right), \sqrt{\frac{-(a_i+2\sigma_2(a_i))(a_i-\sigma_2(a_i))}{\sigma_2(a_i)(2a_i+\sigma_2(a_i))}}\right)},
\end{cases}
\tag{3.8}
$$

$$
\begin{cases}
T_{2i-1}(a_i) = 2\sqrt{\frac{a_i+\sigma_1(a_i)}{a_i(a_i+2\sigma_1(a_i))}}\sqrt{\frac{3}{2l}} K\left(\sqrt{\frac{(a_i+\sigma_1(a_i))(a_i-\sigma_1(a_i))}{a_i(a_i+2\sigma_1(a_i))}}\right) \\
T_{2i}(a_i) = 2\sqrt{\frac{-(a_i+\sigma_2(a_i))}{\sigma_2(a_i)(2a_i+\sigma_2(a_i))}}\sqrt{\frac{3}{2l}} K\left(\sqrt{-\frac{(a_i+\sigma_2(a_i))(a_i-\sigma_2(a_i))}{\sigma_2(a_i)(2a_i+\sigma_2(a_i))}}\right),
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

$$a_i = \underbrace{(\sigma_1 \circ \sigma_2) \dots (\sigma_1 \circ \sigma_2)}_{i-1\,\text{個}} \quad (a)$$

$$\left(l > 0, 0 < a < \frac{1}{2l}, i = 1, 2, 3, \dots\right).$$

(3.8),(3.9) で得られた解の 2 周期分をえがくと、図 4 になる。

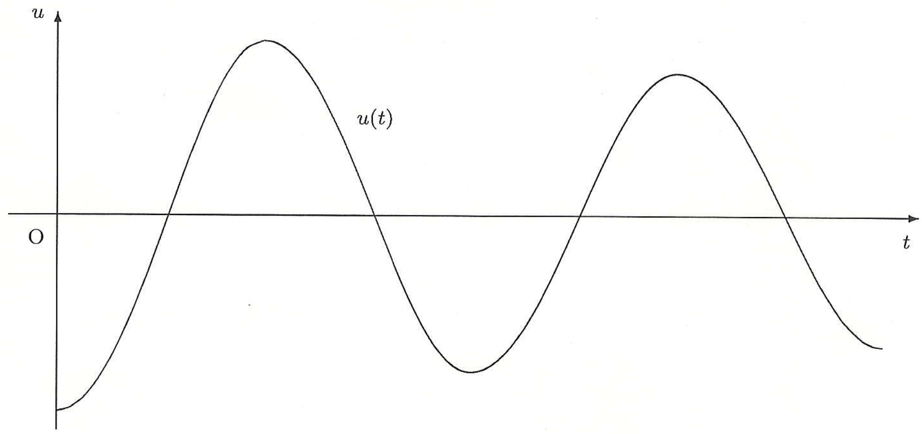

図 4:

3.2 例 2

以下の式で支配される運動を考える。

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + lu^3 = 0, & \dot{u} > 0, \\ \ddot{u} + u - lu^3 = 0, & \dot{u} < 0. \end{cases}$$

この結合系は図形的考察により周期運動であることは明らかであり、復元力が偶関数であることから、運動は左右対称に行われている。

まず、$\dot{u} > 0$ のときを考える。u を t の式で表す。エネルギー保存則を用いて、

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{l}{4}u^4 = E_1$$

であることから、

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - u^2) + \frac{l}{2}(a^4 - u^4)}} \tag{3.10}$$

となるので、

$$\begin{aligned} t &= \int_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2) + \frac{l}{2}(a^4 - \xi^4)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)(\frac{2}{l} + a^2 + \xi^2)}} \end{aligned}$$

である。ここで、$c^2 = \frac{2}{l} + a^2$ とおくと、

$$t = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 - \xi^2)(\xi^2 + c^2)}}$$

となる。これを$\xi = a\cos\theta$で置換すると、

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2}{l}}\int_{\cos^{-1}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin\theta}{a\sin\theta\sqrt{a^2\cos\theta + c^2}}d\theta \\
&= \sqrt{\frac{2}{l}}\int_{\cos^{-1}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)+c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\int_{\cos^{-1}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+c^2}\sin^2\theta}}
\end{aligned}
$$

と計算でき、ここで、$k^2 = \frac{a^2}{a^2+c^2}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\int_{\cos^{-1}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\int_{\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{u}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}
\end{aligned}
$$

となり、これは、

$$
t = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{u}{a}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right)
$$

と積分区間の分割でき、さらに、Jacobi の楕円関数を用いると、

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(K(k) - \mathrm{sn}^{-1}\left(\cos(\sin^{-1}\frac{u}{a}, k)\right)\right) \\
\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{\frac{l}{2}}t &= K(k) - \mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}, k\right) \\
\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}, k\right) &= K(k) - \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{\frac{l}{2}}t
\end{aligned}
$$

と整理され、両辺の逆関数をとると、

$$
\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}} = \mathrm{sn}\left(K(k) - \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{\frac{l}{2}}t, k\right)
$$

を得て、整理すれば、

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{u^2}{a^2} &= \mathrm{sn}^2\left(K(k) - \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{\frac{l}{2}}t, k\right) \\
\frac{u^2}{a^2} &= 1 - \mathrm{sn}^2\left(K(k) - \sqrt{a^2l+1}t, k\right) \\
u^2 &= a^2\left(1 - \mathrm{sn}^2\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2l}{a^2l+1}}\right) - \sqrt{a^2l+1}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2l}{a^2l+1}}\right)\right) \\
u &= a\mathrm{cn}\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2l}{a^2l+1}}\right) - \sqrt{a^2l+1}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2l}{a^2l+1}}\right)
\end{aligned}
$$

が得られる。よって、

$$u_1(t) = a\,\mathrm{cn}\left(K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2l}{a^2l+1}}\right) - \sqrt{a^2l+1}t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2l}{a^2l+1}}\right). \tag{3.11}$$

ここで、cn は楕円関数の一つ ([9, P.28] 参照)。

次に周期を求める。(3.10) 式を 1 周期分で積分するが、$b=-a$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_b^a \frac{1}{\sqrt{(a^2-u^2)+\frac{l}{2}(a^4-u^4)}}du \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^a \frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)(u^2+c^2)}} \end{aligned}$$

となり、$u=a\cos\theta$ で置換して、整理すると

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+c^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2+c^2-a^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2+c^2}}\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2+c^2}}\sqrt{\frac{2}{l}}K\left(\sqrt{\frac{a^2}{a^2+c^2}}\right) \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$T_1(a) = \frac{2}{\sqrt{a^2l+1}}K\left(\frac{\sqrt{a^2l}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2l+1}}\right) \tag{3.12}$$

となる。

続いて、$\dot{u}<0$ における方程式について考える。ただし、$\ddot{u}+u-lu^3=0$ の復元力は単調増加関数ではないため次の仮定を設ける。

$$1 > lu^2 \quad \text{for} \quad {}^\forall u < a.$$

この仮定のもとで以下議論を行っていく。(3.11) 式を求めたのと同様にして、$u_2(t)$ を求めていく。エネルギー保存則を適用して、t を求めると、

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-u^2)-\frac{l}{2}(a^4-u^4)}} \tag{3.13}$$

より、

$$t = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^u \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2-\xi^2)(c^2-\xi^2)}}$$

であるが、ここで $c^2=\frac{2}{l}-a^2$ とおいている。これを $\xi=a\sin\theta$ で置換して

$$t = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{c}\int_0^{\sin^{-1}\frac{u}{a}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin^2\theta}}$$

となり楕円関数を用いて整理して、

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{c}\mathrm{sn}^{-1}\left(\frac{u}{a}, \frac{a}{c}\right), \\
\frac{u}{a} &= \mathrm{sn}\left(t\sqrt{\frac{l}{2}}c, \frac{a}{c}\right), \\
u &= a\mathrm{sn}\left(t\sqrt{1-\frac{a^2l}{2}}, \frac{a\sqrt{l}}{\sqrt{2-a^2l}}\right),
\end{aligned}
$$

となるので、したがって、

$$
u_2(t) = a\mathrm{sn}\left(t\sqrt{1-\frac{a^2l}{2}}, \frac{a\sqrt{l}}{\sqrt{2-a^2l}}\right) \tag{3.14}
$$

が得られる。次に T_2 を求める。(3.13) 式より、T_1 と同様に積分すれば、

$$
T_2 = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2-\xi^2)(c^2-\xi^2)}}
$$

より、同様に置換して、

$$
T_2 = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin^2\theta}}
$$

であるから、楕円関数を用いて、整理すると、

$$
T_2 = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{1}{c}K\left(\frac{a}{c}\right)
$$

となるので、したがって、

$$
T_2(a) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2l}{2}}}K\left(\frac{a\sqrt{l}}{\sqrt{2-a^2l}}\right) \tag{3.15}
$$

が得られた。

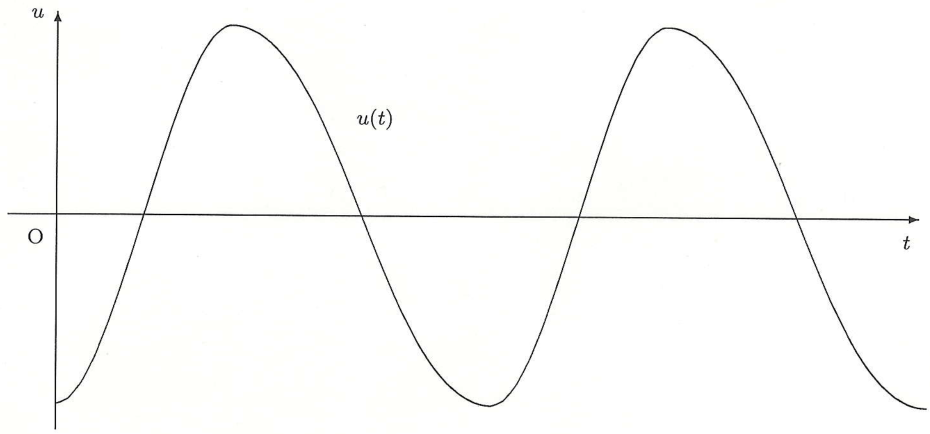

図 5:

以上により、u_1, u_2, T_1, T_2 が求められた。この結合系は例1での結合系と異なり、振幅が変わらない周期運動なので、例1のように一般系を求める必要はなく、正しく t を設定することにより、全ての半周期を求めることができる。

図5に2周期分のグラフを示しておく。

参考文献

[1] K.Deimling, P.Szilágyi, "Periodic solution of dry friction problems", Z angrew Math Phys 45 (1994).

[2] 上村　豊, "逆問題の考え方 -結果から原因を探る数学-", 講談社, 2014年.

[3] Y.Kamimura, "Global existence of a restoring force realizing a prescribed half-period", J.Differential Equations 248 (2010), 2562-2584.

[4] Y.Kamimura, T.Kaneya, "Global determination of a nonlinearity from a periodic motion", J.Math.Anal.Appl. 403 (2013), 506-521.

[5] F.Mañosas, P.J.Torres, "Isochronicity of a class of piecewise continuous oscillators", Proceedings of the American Mathematical Society 133 (2005), 3027-3035.

[6] 森口, 宇田川, 一松, "岩波 数学公式 I（全3冊）", 岩波書店, 2002年.

[7] 中島尚正, "機械工学ハンドブック", 朝倉書店, 2011年

[8] 日本機械学会, "機械工学辞典", 丸善, 2007年

[9] 戸田盛和, "楕円関数入門", 日本評論社, 2015年.

[10] M.Urabe, "Nonlinear Autonomous Oscillations ", Academic, New York, 1967.

[11] 吉田耕作, "積分方程式論"第2版, 岩波書店, 1978年.